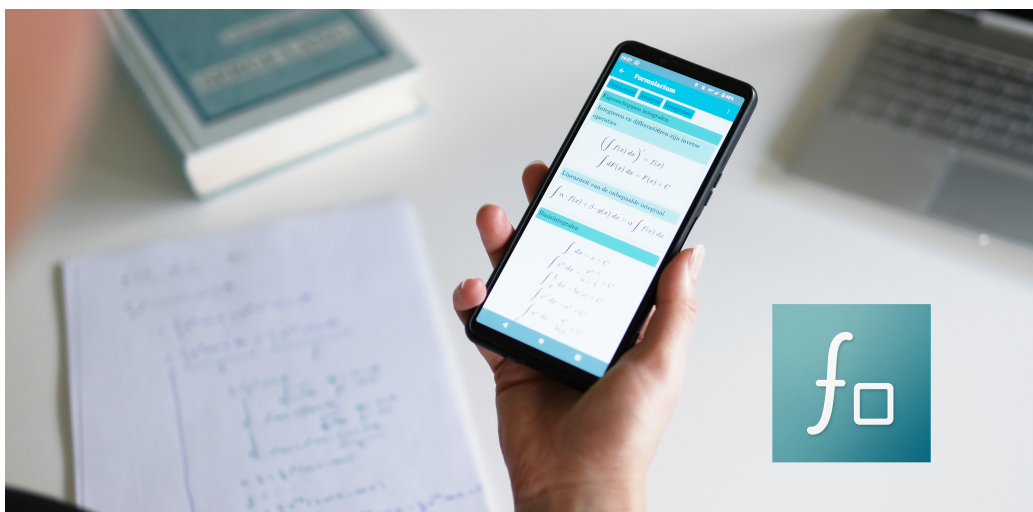


Formularium

Alle wiskundige formules op één plaats!



Scan de QR-code of klik op de link voor de app:



`formularium.app`

Versie: 16 september 2026

Inhoudsopgave

1	Algebra	13
1.1	Reële getallen	13
1.1.1	Getallenas	13
1.1.2	Volgorde bewerkingen	13
1.1.3	Haakjes	14
1.1.4	Teken	14
1.1.5	Haakjes en tekens	14
1.1.6	Breuken	15
1.2	Merkwaardige producten	15
1.2.1	Merkwaardige producten	15
1.2.2	Binomium van Newton	16
1.3	Veeltermen	16
1.3.1	Nulveelterm	16
1.3.2	Eerstegraadsveelterm	16
1.3.3	Tweedegraadsveelterm	16
1.3.4	Veeltermen van hogere graad	17
1.4	Machten	18
1.4.1	Definitie machten	18
1.4.2	Negatieve exponent	18
1.4.3	Teken van machten	18
1.4.4	Rekenregels machten	18
1.4.5	Rationale exponent	18
1.5	Vierkantswortels	19
1.5.1	Definitie vierkantswortel	19
1.5.2	Rekenregels vierkantswortels	19
1.6	Machtswortels	19
1.6.1	Definitie machtswortel	19
1.6.2	Rekenregels machtswortels	19
1.7	Logaritmen	20
1.7.1	Definitie logaritme	20

1.7.2	Bijzondere logaritmen	20
1.7.3	Eigenschappen van logaritmen	20
1.8	Absolute waarde	20
1.8.1	Absolute waarde	20
1.8.2	Eigenschappen absolute waarde	21
1.9	Deelbaarheid	21
1.9.1	Deelbaarheid	21
1.9.2	Gemene veelvoud/deler	22
1.9.3	Euclidische deling	22
1.9.4	Priemgetallen	23
1.10	Sommaties	23
1.10.1	Definitie	23
1.10.2	Rekenregels sommaties	23
1.10.3	Sommatie identiteiten	24
2	Lineaire algebra	25
2.1	Matrices	25
2.1.1	Definities matrices	25
2.1.2	Bijzondere matrices	25
2.1.3	Som twee matrices	26
2.1.4	Scalair product matrices	27
2.1.5	Product twee matrices	27
2.1.6	Getransponeerde van een matrix	28
2.1.7	Bijzondere vierkante matrices	28
2.1.8	Inverse matrices	28
2.2	Stelsels	29
2.2.1	Definitie	29
2.2.2	Elementaire rijoperaties	30
2.2.3	Trapvorm	30
2.2.4	Homogeen stelsel	31
2.3	Determinanten	31
2.3.1	Definities	31
2.3.2	Eigenschappen van determinanten	32
3	Goniometrie	35
3.1	Hoeken	35
3.1.1	Zestigdelige graad	35
3.1.2	Radialen	35
3.1.3	Georiënteerde hoeken	36
3.1.4	Verband tussen radialen en graden	37
3.2	Goniometrische getallen	37

3.2.1	Goniometrische getallen in een rechthoekige driehoek .	37
3.2.2	Goniometrische getallen in de goniometrische cirkel . .	38
3.2.3	Definities	39
3.2.4	Grondformule van de goniometrie	39
3.2.5	Bijzondere hoeken	39
3.2.6	Verwante hoeken	40
3.3	Driehoeksmeting	41
3.3.1	Rechthoekige driehoeken	42
3.3.2	Willekeurige driehoeken	42
3.4	Goniometrische formules	43
3.4.1	Grondformule	43
3.4.2	Optellingsformules	43
3.4.3	Verdubbelingsformules	44
3.4.4	Formules van Carnot	44
3.4.5	t-formules	44
3.4.6	Formules van Simpson	45
4	Meetkunde	47
4.1	Vlakke meetkunde	47
4.1.1	Punten	47
4.1.2	Rechten	47
4.1.3	Driehoeken	50
4.1.4	Cirkels	50
4.2	Vlakke figuren	50
4.2.1	Begrippen	50
4.2.2	Figuren	51
4.3	Synthetische ruimtemeetkunde	56
4.3.1	Axioma's	56
4.3.2	Onderlinge ligging	56
4.4	Analytische ruimtemeetkunde	57
4.4.1	Vergelijkingen rechte	57
4.4.2	Vergelijkingen vlak	60
4.4.3	Onderlinge stand rechten	62
4.4.4	Onderlinge ligging rechte en vlak	65
4.4.5	Onderlinge ligging vlakken	65
4.5	Ruimtefiguren	66
4.5.1	Begrippen	66
4.5.2	Figuren	67
4.6	Vectoren	71
4.6.1	Definities van vectoren	71
4.6.2	Optellen van vectoren	72

4.6.3	Scalaire vermenigvuldiging van vectoren	72
4.6.4	Norm van een vector	73
4.6.5	Inproduct van twee vectoren	73
5	Reële functies	75
5.1	Reële functies	75
5.1.1	Definities	75
5.1.2	Karakteristieken van reële functies	76
5.2	Veeltermen	78
5.2.1	Veelterm	78
5.2.2	Graad na bewerkingen	78
5.2.3	Euclidische deling	79
5.3	Veeltermfuncties	79
5.3.1	Algemeen	79
5.3.2	Veeltermfuncties van graad 0	79
5.3.3	Veeltermfuncties van graad 1	80
5.3.4	Veeltermfuncties van graad 2	81
5.4	Rationale functies	82
5.4.1	Basisfunctie	82
5.4.2	Homografische functies	83
5.4.3	Rationale functies	84
5.5	Exponentiële functies	84
5.5.1	Exponentiële functies	84
5.6	Logaritmische functies	85
5.6.1	Logaritmische functie	85
5.6.2	Hoofdeigenschap logaritmische functies	86
5.7	Goniometrische functies	87
5.7.1	Sinusfunctie	87
5.7.2	Cosinusfunctie	88
5.7.3	Tangensfunctie	89
6	Analyse	91
6.1	Limieten	91
6.1.1	Definitie limiet	91
6.1.2	Rekenregels limieten	91
6.1.3	Rekenregels oneindig	92
6.1.4	Voorlopig onbepaalde vormen	92
6.1.5	Basislimieten	93
6.1.6	Limieten van een veeltermfuncties	93
6.1.7	Limiet van een rationale functie	93
6.1.8	Limieten van goniometrische functies	94

6.1.9	Bijzondere limieten	94
6.1.10	Regel van de l'Hospital	94
6.2	Asymptoten	95
6.2.1	Verticale asymptoten (V.A.)	95
6.2.2	Horizontale asymptoten (H.A.)	95
6.2.3	Schuine asymptoten (S.A.)	96
6.3	Afgeleiden	97
6.3.1	Afgeleide waarde	97
6.3.2	Basisafgeleiden	97
6.3.3	Afgeleiden van exponentiële en logaritme	98
6.3.4	Goniometrische afgeleiden	98
6.3.5	Eigenschappen van afgeleiden	98
6.3.6	Hogere afgeleiden	99
6.4	Functieonderzoek	99
6.4.1	Raaklijn	99
6.4.2	Stijgen en dalen van een functie	100
6.5	Rijen en reeksen	101
6.5.1	Rijen	101
6.5.2	Rekenkundige rijen	102
6.5.3	Meetkundige rijen	103
6.5.4	Harmonische rij	103
6.5.5	Rij van Fibonacci	104
6.6	Integralen	104
6.6.1	Definities	104
6.6.2	Eigenschappen integralen	104
6.6.3	Basisintegralen	107
6.6.4	Integratiemethoden	108
6.6.5	Integratie van Rationale Functies	108
6.6.6	Toepassingen van bepaalde integralen	109
7	Complexe getallen	111
7.1	Complexe getallen	111
7.1.1	Definities complexe getallen	111
7.1.2	Bewerkingen complexe getallen	112
7.1.3	Machten van complexe getallen	113
7.1.4	Vierkantswortel van een complex getal	114
7.1.5	Complexe vierkantsvergelijkingen	115
7.1.6	Binomiaalvergelijkingen	115
7.2	Goniometrische gedaante	116
7.2.1	Goniometrische gedaante	116
7.2.2	Bewerkingen in goniometrische vorm	117

7.2.3	Formule van Euler	117
7.2.4	Formule van de Moivre	117
7.3	Veeltermen met complexe coëfficiënten	117
7.3.1	Definities	117
7.3.2	Deelbaarheid	118
8	Logica	121
8.1	Propositielogica	121
8.1.1	Uitspraken	121
8.1.2	Stellingen	122
8.1.3	Uitspraken met kwantoren	123
9	Stochastiek	125
9.1	Beschrijvende statistiek	125
9.1.1	Begrippen	125
9.1.2	Veranderlijken	125
9.1.3	Kengetallen	125
9.2	Combinatieleer	126
9.2.1	Productregel	126
9.2.2	Somregel	126
9.2.3	Faculteit	127
9.2.4	Permutaties	127
9.2.5	Variaties	127
9.2.6	Herhalingsvariaties	127
9.2.7	Combinaties	127
9.2.8	Herhalingscombinaties	127
9.2.9	Anagrammen (Herhalingspermutaties)	128
9.2.10	Driehoek van Pascal	128
9.3	Kansrekening	129
9.3.1	Basisbegrippen kansrekening	129
9.3.2	Gebeurtenissen	129
9.3.3	Kanswaarde	130
9.3.4	Regel van Laplace	131
9.3.5	Kanswetten	131
9.3.6	Voorwaardelijke kans	131
9.3.7	Onafhankelijke gebeurtenissen	132
9.4	Distributiefuncties	133
9.4.1	Speciale distributiefuncties	133

10 Fysica	137
10.1 Optica	137
10.1.1 Wet van Snellius	137
10.1.2 Lensformule	137
10.2 Druk	137
10.2.1 Hydrostatische druk	137
10.2.2 Opwaartse kracht in een vloeistof	138
10.3 Gaswetten	138
10.3.1 Ideale gaswet	138
10.3.2 Boyle's wet	138
10.4 Warmteleer	139
10.4.1 Eerste hoofdwet van de thermodynamica	139
10.4.2 Warmteoverdracht	139
10.4.3 Warmtecapaciteit	139
10.4.4 Smeltwarmte	139
10.4.5 Verdampingswarmte	140
10.5 Elektrostatica	140
10.5.1 Wet van Coulomb	140
10.5.2 Elektrisch veld van een puntlading	140
10.5.3 Elektrische potentiaal van een puntlading	140
10.5.4 Relatie tussen elektrisch veld en potentiaal	141
10.5.5 Capaciteit van een condensator	141
10.5.6 Energie opgeslagen in een condensator	141
10.5.7 Continuïteitsvergelijking (Gauss' wet voor elektriciteit)	141
10.6 Elektromagnetisme	141
10.6.1 Lorentzkracht op een bewegende lading in een magnetisch veld	141
10.6.2 Lorentzkracht op een stroomdragende geleider in een magnetisch veld	142
10.6.3 Magnetisch veld rond een lange rechte stroomdragende draad	142
10.6.4 Magnetisch veld in de kern van een lange spoel	142
10.6.5 Magnetische flux	143
10.6.6 Wet van Biot-Savart	143
10.6.7 Ampère's wet	143
10.6.8 Faraday's wet van elektromagnetische inductie	143
10.6.9 Lenz's wet	144
10.6.10 Maxwell's vergelijkingen	144
10.6.11 Snelheid van licht in vacuüm	144
10.7 Kernfysica	145
10.7.1 Activiteit van een radioactieve stof	145

10.7.2	Aantal overgebleven kernen na tijd t	145
10.7.3	Relatie van de vervalconstante met de halfwaardetijd	145
10.8	Kinematica	145
10.8.1	Verplaatsing met constante snelheid	145
10.8.2	Snelheid bij een constante versnelling	146
10.8.3	Verplaatsing bij een constante versnelling	146
10.9	Dynamica	146
10.9.1	Tweede wet van Newton	146
10.9.2	Wet van Newton	147
10.9.3	Zwaartekracht op een object nabij het aardoppervlak	147
10.9.4	Werk verricht door een kracht	147
10.9.5	Vermogen	147
10.9.6	Veerkracht	148
10.9.7	Kinetische energie	148
10.9.8	Potentiële energie in een zwaartekrachtsveld	148
10.9.9	Potentiële energie in een veer	148
10.9.10	Centripetale versnelling	149
10.10	Trillingen en Golven	149
10.10.1	Harmonische trilling	149
10.10.2	Golfvergelijking	149
10.10.3	Relatie tussen hoekfrequentie en periode	150
10.10.4	Relatie tussen golflengte, snelheid, en frequentie	150
10.10.5	Periode van een simpele harmonische trilling	150
10.10.6	Harmonische frequenties in een gesloten buis	150
10.11	Geluid	151
10.11.1	Geluidssnelheid in een medium	151
10.11.2	Dopplereffect voor een waarnemer in rust	151
10.11.3	Geluidsintensiteit	151
10.11.4	Geluidsniveau	151
10.12	Fysische constanten	152
10.12.1	Atmosferische druk	152
10.12.2	Gravitatie	152
10.12.3	Lichtsnelheid in vacuüm	152
10.12.4	Plancks constante	152
10.12.5	Gasconstante	152
10.12.6	Elektronenlading	152
10.12.7	Massadichtheid	152
10.12.8	Thermische eigenschappen	153
10.12.9	Elektrostatica	153
10.12.10	Energie	153
10.12.11	Massa's van fundamentele deeltjes	153

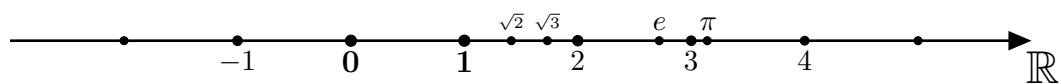
11 Symbolen	155
11.1 Griekse symbolen	156
11.1.1 Griekse symbolen	156
11.2 Symbolen uit de logica	157
11.2.1 Propositielogica	157
11.2.2 Predicatenlogica	157
11.3 Verzamelingen	157
11.3.1 Getalverzamelingen	157
11.3.2 Verzamelingenleer	158
11.4 Wiskundige constanten	158
11.4.1 Pi	158
11.4.2 Getal van Euler	158
11.4.3 Pythagoras constante	158
11.4.4 Theodorus constante	158
11.4.5 Gulden snede (Phi)	159
11.4.6 Imaginaire eenheid	159
12 Tabellen	161
12.1 Machten	161
12.1.1 Machten met natuurlijk grondtal en natuurlijke exponent	161
12.2 Standaardnormale verdeling	162
12.2.1 Standaardnormale verdeling	162

Hoofdstuk 1

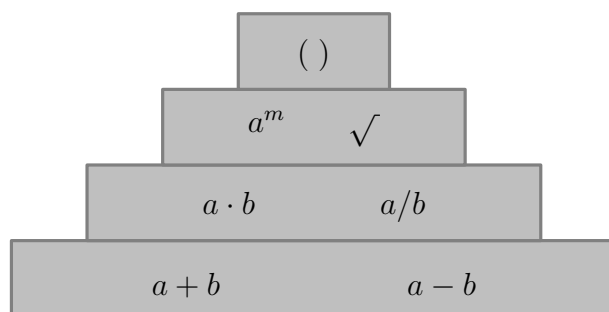
Algebra

1.1 Reële getallen

1.1.1 Getallenas



1.1.2 Volgorde bewerkingen



1.1.3 Haakjes

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$$

1.1.4 Teken

$$+ \cdot + = +$$

$$- \cdot - = +$$

$$- \cdot + = -$$

$$+ \cdot - = -$$

1.1.5 Haakjes en tekens

$$-(a \cdot b) = -a \cdot b$$

$$\stackrel{\text{of}}{=} a \cdot (-b)$$

$$+(\pm a \pm b) = \pm a + \pm b$$

$$-(\pm a \pm b) = \mp a \mp b$$

1.1.6 Breuken

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{a}{b} \bigg/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

1.2 Merkwaardige producten**1.2.1 Merkwaardige producten****MP1**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

MP2

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

MP3

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

MP4

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

1.2.2 Binomium van Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\text{met } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

1.3 Veeltermen

1.3.1 Nulveelterm

Vorm

$$0$$

Opmerking graad nulveelterm is onbepaald

1.3.2 Eerstegraadsveelterm

Vorm

$$ax + b$$

Wortel

$$x_0 = \frac{-b}{a}$$

1.3.3 Tweedegraadsveelterm

Vorm

$$ax^2 + bx + c$$

Wortels Bereken $D = b^2 - 4ac$

- $D > 0 \Rightarrow$ twee verschillende wortels $\in \mathbb{R}$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

- $D = 0 \Rightarrow$ twee gelijke wortels $\in \mathbb{R}$

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

- $D < 0 \Rightarrow$ geen wortels $\in \mathbb{R}$

Eigenschappen

- Ontbinden: Zijn x_1 en x_2 wortels

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

1.3.4 Veeltermen van hogere graad

Vorm

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- x : onbekende
- $a_i x^i$: termen
- a_i : coëfficiënten
- n : graad
- a_0 : constante term

Eigenschappen

- De **getalwaarde** van p in $\alpha \in \mathbb{R}$ is

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0$$

- $a \in \mathbb{R}$ is een **wortel** van $p(x)$

$$\Leftrightarrow p(a) = 0$$

Synoniemen: nulwaarde of nulpunt

- $d(x)$ is een **factor** van $p(x)$

$$\Leftrightarrow p(x) = d(x) \cdot q(x)$$

met $q(x)$ een zekere veelterm

- Verband wortel en factoren:

$$p(a) = 0 \Leftrightarrow p(x) = (x - a) \cdot q(x)$$

met $q(x)$ een andere veelterm

1.4 Machten

1.4.1 Definitie machten

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factoren}}$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

1.4.2 Negatieve exponent

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

1.4.3 Teken van machten

$$(\pm a)^{\overbrace{2k}^{\text{even}}} = +a^{2k}$$

$$(\pm a)^{\overbrace{2k+1}^{\text{oneven}}} = \pm a^{2k+1}$$

1.4.4 Rekenregels machten

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(ab)^m = a^m b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

1.4.5 Rationale exponent

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$$

1.5 Vierkantswortels

1.5.1 Definitie vierkantswortel

x is een **vierkantswortel** uit a

$$\Leftrightarrow x^2 = a$$

1.5.2 Rekenregels vierkantswortels

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a^m} = \sqrt{a^m}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$$

1.6 Machtswortels

1.6.1 Definitie machtswortel

x is een n -de **machtswortel** uit a

$$\Leftrightarrow x^n = a$$

1.6.2 Rekenregels machtswortels

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & (n \text{ is even}) \\ a & (n \text{ is oneven}) \end{cases}$$

1.7 Logaritmen

1.7.1 Definitie logaritme

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

1.7.2 Bijzondere logaritmen

Naam	Notatie
Briggse logaritme	$\log x = \log_{10} x$
Neperiaanse logaritme	$\ln x = \log_e x$
Binaire logaritme	$\lg x = \log_2 x$

1.7.3 Eigenschappen van logaritmen

Zelfde grondtal

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$$

$$\log_a (x^p) = p \cdot \log_a x$$

Verschillend grondtal

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$$

1.8 Absolute waarde

1.8.1 Absolute waarde

Definitie

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a \leq 0) \end{cases}$$

Gevolg

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

1.8.2 Eigenschappen absolute waarde

$$|a| \geq 0$$

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$||a|| = |a|$$

$$|-a| = |a|$$

$$|a - b| = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

$$|a - b| \geq \left| |a| - |b| \right|$$

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$$

$$|a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b \text{ of } a \geq b$$

1.9 Deelbaarheid

1.9.1 Deelbaarheid

Definitie: d deelt a

$$\Leftrightarrow d|a$$

$$\Leftrightarrow d \in \mathbb{Z}_0 \wedge \exists q \in \mathbb{Z} : a = qd$$

- $d \in \mathbb{Z}_0$: deler van a
- $a \in \mathbb{Z}$: veelvoud van d
- $\text{del}(a) = \{d|a : d \in \mathbb{Z}_0\}$

Eigenschappen:

- $d|a \Rightarrow -d|a$

- $d|a \Rightarrow d|-a$
- $\forall a \in \mathbb{Z} : \pm 1|a$
- $\forall d \in \mathbb{Z}_0 : d|0$
- $\forall a \in \mathbb{Z} : 0 \nmid a$
- $\forall d \in \mathbb{Z}_0 : d|d$

Lineaire combinaties:

$$\left. \begin{array}{l} d|a \\ d|b \end{array} \right\} \Rightarrow d|xa + yb, \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

1.9.2 Gemene veelvoud/deler

Kleinste gemene veelvoud: m is het kleinste natuurlijk getal dat een veelvoud is van a en b

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow m = \text{kgv}(a, b) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \\ \forall c \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} : c \geq m \wedge c \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Grootste gemene deler: d is het grootste natuurlijk getal dat een deler is van a en b

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow d = \text{ggd}(a, b) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} d \in \text{del}(a) \cap \text{del}(b) \\ \forall c \in \text{del}(a) \cap \text{del}(b) : c \leq d \end{cases} \end{aligned}$$

Eigenschap:

$$\text{kgv}(a, b) \cdot \text{ggd}(a, b) = a \cdot b$$

1.9.3 Euclidische deling

$$\begin{aligned} &\forall a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_0 : \exists! q \in \mathbb{Z}, \exists! r \in \mathbb{Z} : \\ &a = bq + r \quad (0 \leq r < |b|) \end{aligned}$$

- q : quotiënt
- r : rest

1.9.4 Priemgetallen

Definitie: Een priemgetal $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ heeft enkel 1 en zichzelf als positieve delers

$$\Leftrightarrow p \text{ is priem}$$

$$\Leftrightarrow \text{del}(p) \cap \mathbb{N} = \{1, p\}$$

Hoofdstelling van de rekenkunde: Elke $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ kan worden ontbonden in priemfactoren

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

- $p_1, \dots, p_k$: verschillende priemfactoren
- $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}_0$
- $\#\text{del}(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$

1.10 Sommaties

1.10.1 Definitie

$$\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

- Σ : sommatieteken
- i : sommatie-index
- a_i : termen

1.10.2 Rekenregels sommaties

Groeperen som

$$\sum_{i=0}^n a_i + \sum_{i=0}^n b_i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)$$

Groeperen verschil

$$\sum_{i=0}^n a_i - \sum_{i=0}^n b_i = \sum_{i=0}^n (a_i - b_i)$$

Splitsen som

$$\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=0}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i \quad (m < n)$$

Scalair product van een som

$$\sum_{i=0}^n (k \cdot a_i) = k \cdot \sum_{i=0}^n a_i$$

Som van constanten

$$\sum_{i=0}^n k = (n+1)k$$

1.10.3 Sommatie identiteiten

Som van natuurlijke getallen

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Som van kwadraten

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Meetkundige som

$$\sum_{i=1}^n x^i = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{met } x \neq 1$$

Telescopische som

$$\sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$$

Hoofdstuk 2

Lineaire algebra

2.1 Matrices

2.1.1 Definities matrices

Een $m \times n$ -matrix heeft de vorm

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- a_{ij} : elementen
- $m \times n$: orde (*grootte*)
- m : aantal rijen
- n : aantal kolommen
- Notatie: $A, B, C, \dots$
- Verkorte schrijfwijze: (a_{ij})
- $\mathbb{R}^{m \times n}$: verzameling van alle $m \times n$ -matrices

2.1.2 Bijzondere matrices

Nulmatrix $O_{m,n}$ is een $m \times n$ -matrix met alle $a_{ij} = 0$

Rijmatrix precies één rij.

Kolommatrix precies één kolom.

Vierkante matrix evenveel rijen als kolommen, $m = n$.

- **hoofddiagonaal** : rij elementen $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$
- **nevendiagonaal** : rij elementen $a_{n-1,1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{n-1,n}$

Diagonaalmatrix een vierkante matrix met alle $a_{ij} = 0$ waarbij $i \neq j$

Scalaire matrix een diagonaalmatrix met $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$

Bovendriehoeksmatrix een vierkante matrix waarvoor $a_{ij} = 0$ met $i > j$

Onderdriehoeksmatrix een vierkante matrix waarvoor $a_{ij} = 0$ met $i < j$

Eenheidsmatrix I_n van orde n waarvoor $a_{ii} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.3 Som twee matrices

Definitie

$$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow A + B = C \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

met

$$(c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Groepseigenschappen I-A-N-S-C

$$A + B = C \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + O_{m,n} = A = O_{m,n} + A$$

$$A + (-A) = O_{m,n} = (-A) + A$$

$$A + B = B + A$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}, + \text{ is een commutatieve groep}$$

2.1.4 Scalair product matrices

Definitie

$$\lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda \cdot A &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \cdots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eigenschappen

$$\lambda \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$$

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$$

$$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$$

$$1 \cdot A = A$$

$$0 \cdot A = O_{m,n}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}^{m \times n}, + \text{ is een reële vectorruimte}$$

2.1.5 Product twee matrices

Definitie

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p} \Rightarrow A \cdot B = C \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

met

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Associatief

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Opslappend element

$$A_{m \times n} \cdot O_{n \times p} = O_{m \times p} = O_{m \times n} \cdot B_{n \times p}$$

Neutraal element

$$A \cdot I = A = I \cdot A$$

NIET commutatief!

2.1.6 Getransponeerde van een matrix

Definitie Als $A = (a_{ij})$ dan is de getransponeerde matrix A^T is

$$A^T = (a_{ji})$$

(rijen $\leftrightarrow$ kolommen)

Eigenschappen

$$(A^T)^T = A$$

$$(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

2.1.7 Bijzondere vierkante matrices

$$A \text{ is symmetrisch} \Leftrightarrow A^T = A$$

$$A \text{ is antisymmetrisch} \Leftrightarrow A^T = -A$$

$$A \text{ is orthogonaal} \Leftrightarrow A \cdot A^T = I_n = A^T \cdot A$$

$$A \text{ is idempotent} \Leftrightarrow A^2 = A$$

$$A \text{ is nilpotent met index } p \Leftrightarrow p = \min\{n \in \mathbb{N} : A^n = O\}$$

2.1.8 Inverse matrices

A^{-1} is de **inverse matrix** van A

$$\Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

2.2 Stelsels

2.2.1 Definitie

Stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- a_{ij} : coëfficiënten
- x_i : onbekenden
- b_i : constante termen (bekenden)

Stelsel als matrixvergelijking

$$A \cdot X = B$$

- A : coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- X : onbekendenmatrix

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- B : matrix van constante termen (bekenden)

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Verhoogde matrix

$$A_B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

2.2.2 Elementaire rijoperaties

Verwisselen twee rijen

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

Vermenigvuldigen rij met getal

$$R_i \leftarrow k \cdot R_i \quad \text{met } k \neq 0$$

Veelvoud rij bij andere rij

$$R_i \leftarrow R_i + k \cdot R_j \quad \text{met } i \neq j$$

2.2.3 Trapvorm

Rij canonieke trapmatrix voldoet aan

- alle nulrijen staan onderaan
- **hoofdelement**: eerste niet-nulelement in een rij is 1
- alle elementen boven of onder een hoofdelement zijn 0
- **trapvorm**: elke rij begint met meer nullen van de vorige

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Rang

- $\text{rang}(A)$: aantal niet-nulrijen in de rij canonieke trapmatrix van A

2.2.4 Homogeen stelsel

Algemeen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow A \cdot X = 0$$

Homogeen 2×3 -stelsel

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

met rang 2 heeft oneindig veel ($\lambda \in \mathbb{R}$) oplossingen:

$$x = \lambda \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad y = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad z = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

2.3 Determinanten

2.3.1 Definities

Determinant van een 1×1 -matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

Determinant van een 2×2 -matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Determinant van een 3×3 -matrix

Regel van Sarrus

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Regel van Laplace

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \\ = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}$$

- $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$: cofactor van a_{ij} , product van $(-1)^{i+j}$ en de minor M_{ij} van a_{ij}
- M_{ij} : minor M_{ij} van a_{ij} , determinant van A waarbij je de i -de rij en j -de kolom schrapt

Determinant van een $n \times n$ -matrix

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad i \text{ een willekeurige rij} \\ = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad j \text{ een willekeurige kolom}$$

2.3.2 Eigenschappen van determinanten**Hoofdeigenschappen**

- Twee rijen of kolommen wisselen $\Rightarrow$ teken determinant veranderen
- Twee gelijke rijen of kolommen $\Rightarrow$ determinant = 0
- Rij of kolom is veelvoud van andere rij of kolom $\Rightarrow$ determinant = 0
- Rij of kolom maal factor $k \Rightarrow$ determinant maal factor k
- Rij of kolom optellen met veelvoud andere rij of kolom $\Rightarrow$ determinant blijft gelijk

Bewerkingen

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Bestaan van een inverse matrix

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Bepalen van de inverse matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

- $\text{adj}(A)$: adjunctmatrix, matrix waarbij elk element a_{ij} wordt vervangen door cofactor A_{ij} en de bekomen matrix wordt getransponeerd

Regel van Cramer Stelsel

$$A \cdot X = B$$

met $\det(A) \neq 0$:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

- A_i : matrix A met kolom i vervangen door B .

Hoofdstuk 3

Goniometrie

3.1 Hoeken

3.1.1 Zestigdelige graad

$$1^{\circ} = 60'$$

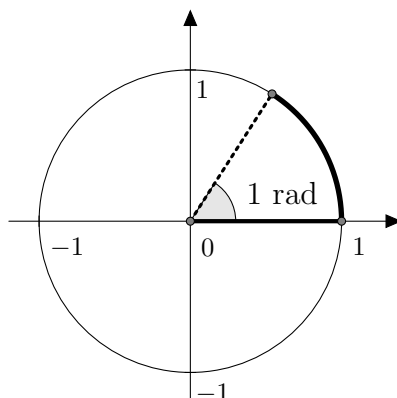
$$1' = 60''$$

$$\Rightarrow 1^{\circ} = 3600''$$

- $^{\circ}$: graden, volledige cirkel = 360°
- $'$: minuten
- $''$: seconden

3.1.2 Radialen

Een **radiaal** (1 rad): grootte van een middelpuntshoek van een cirkel waarvan de lengte van de boog = lengte van de straal.



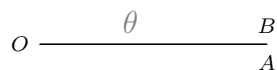
- $\theta \text{ rad} = (\theta + k \cdot 2\pi) \text{ rad} \ (k \in \mathbb{Z})$
- symbool *rad* mogen we weglaten

3.1.3 Georiënteerde hoeken

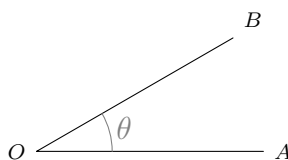
- hoek bepaald op een geheel veelvoud van 360°
- hoek positief: in tegenwijzerzin
- hoek negatief: in wijzerzin

$\theta \in [0^\circ, 360^\circ[$:

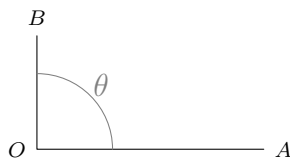
- θ nulhoek $\Leftrightarrow \theta = 0^\circ$



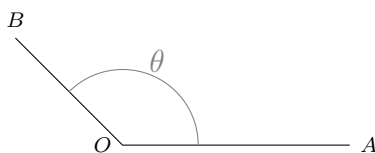
- θ scherpe hoek $\Leftrightarrow 0^\circ < \theta < 90^\circ$



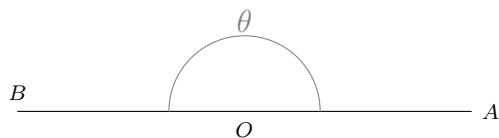
- θ rechte hoek $\Leftrightarrow \theta = 90^\circ$



- θ stompe hoek $\Leftrightarrow 90^\circ < \theta < 180^\circ$



- θ gestrekte hoek $\Leftrightarrow \theta = 180^\circ$



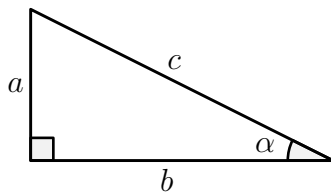
3.1.4 Verband tussen radialen en graden

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad x^\circ = x \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$x \text{ rad} = x \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

3.2 Goniometrische getallen

3.2.1 Goniometrische getallen in een rechthoekige driehoek

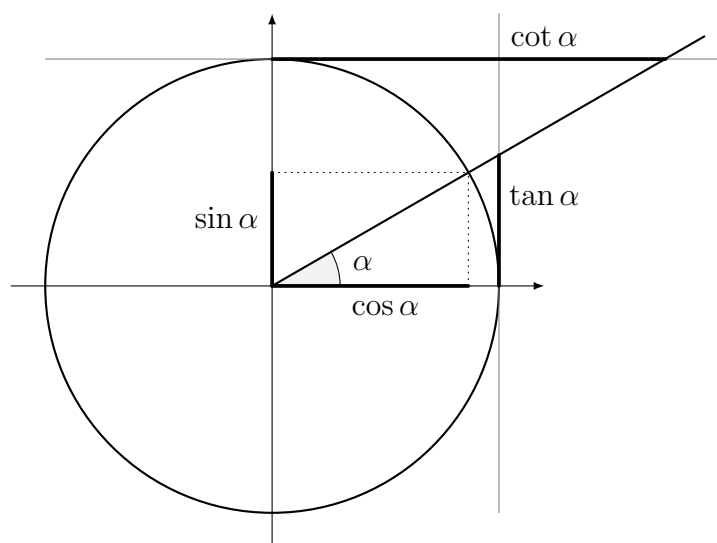


$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{overstaande}}{\text{schuine}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{aanliggende}}{\text{schuine}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{overstaande}}{\text{aanliggende}}$$

3.2.2 Goniometrische getallen in de goniometrische cirkel



3.2.3 Definities

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

3.2.4 Grondformule van de goniometrie

Grondformule

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Gevolgen

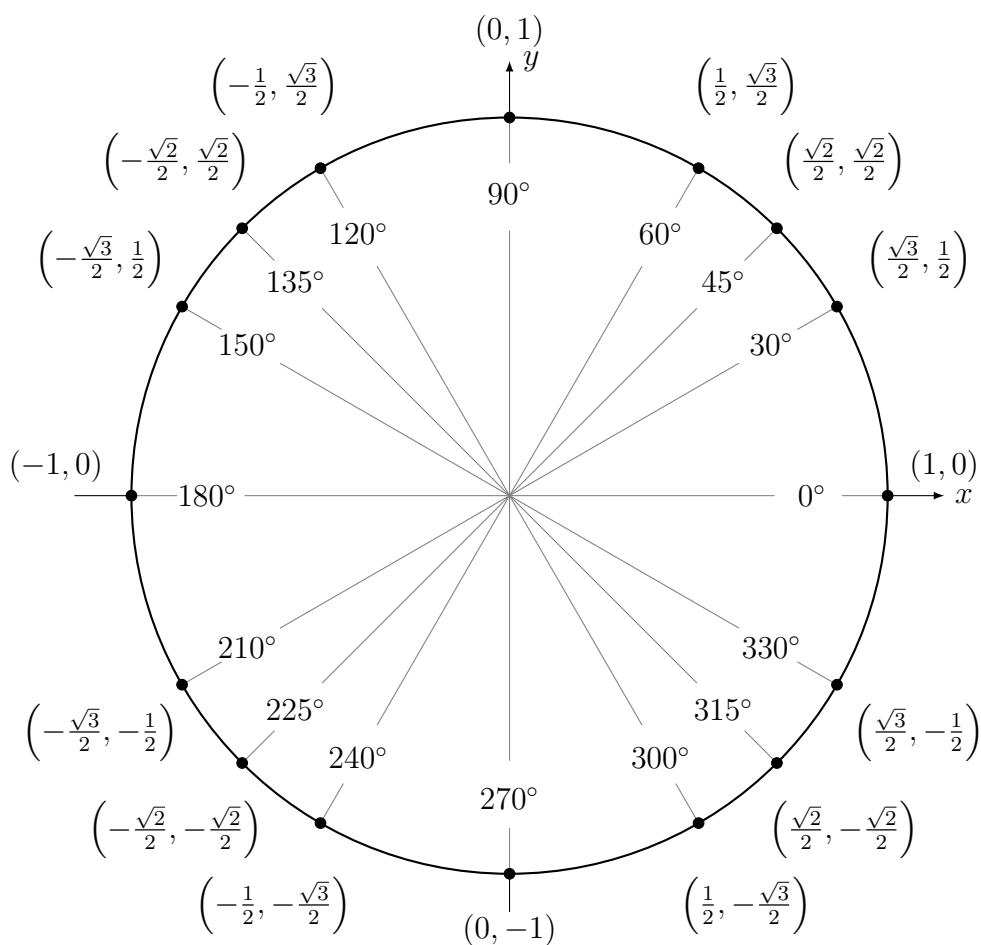
$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$\sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha = \sec^2 \alpha \csc^2 \alpha$$

3.2.5 Bijzondere hoeken

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0



3.2.6 Verwante hoeken

Hoek α

Tegengestelde hoeken $\beta = -\alpha$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$$

Complementaire hoeken som hoeken is 90°

$$\Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot(\alpha)$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan(\alpha)$$

Anti-complementaire hoeken verschil hoeken is 90°

$$\Rightarrow \beta = 90^\circ + \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot(\alpha)$$

$$\cot(90^\circ + \alpha) = -\tan(\alpha)$$

Supplementaire hoeken som hoeken is 180°

$$\Rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan(\alpha)$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot(\alpha)$$

Anti-supplementaire hoeken verschil hoeken is 180°

$$\Rightarrow \beta = 180^\circ + \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan(\alpha)$$

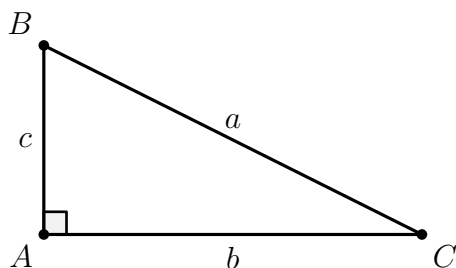
$$\cot(180^\circ + \alpha) = \cot(\alpha)$$

3.3 Driehoeksmeting

Som hoeken in een driehoek

$$|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| = 180^\circ$$

3.3.1 Rechthoekige driehoeken



Stelling van Pythagoras In $\triangle ABC$ met $|\hat{A}| = 90^\circ$ geldt:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

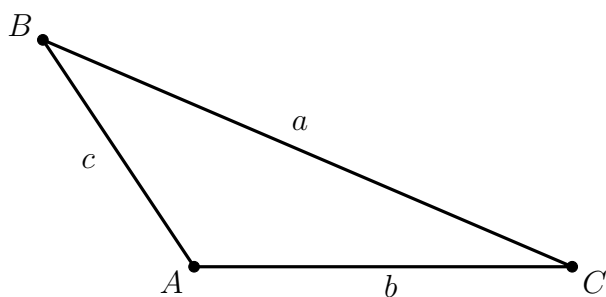
Goniometrische getallen van een rechthoekige driehoek

$$\sin |\hat{C}| = \frac{c}{a} = \frac{\text{overstaande}}{\text{schuine}}$$

$$\cos |\hat{C}| = \frac{b}{a} = \frac{\text{aanliggende}}{\text{schuine}}$$

$$\tan |\hat{C}| = \frac{c}{b} = \frac{\text{overstaande}}{\text{aanliggende}}$$

3.3.2 Willekeurige driehoeken



Cosinusregel in een willekeurige driehoek

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos |\hat{A}|$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot ac \cdot \cos |\hat{B}|$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos |\hat{C}|$$

Sinusregel in een willekeurige driehoek

$$\frac{a}{\sin |\hat{A}|} = \frac{b}{\sin |\hat{B}|} = \frac{c}{\sin |\hat{C}|}$$

3.4 Goniometrische formules**3.4.1 Grondformule**

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

3.4.2 Optellingsformules

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$$

3.4.3 Verdubbelingsformules

Twee maal

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Drie maal

$$\sin 3\alpha = 3 \cdot \sin \alpha - 4 \cdot \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cdot \cos^3 \alpha - 3 \cdot \cos \alpha$$

3.4.4 Formules van Carnot

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

3.4.5 t-formules

$$\text{Stel } t = \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$$

3.4.6 Formules van Simpson

Product naar som

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$-2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$$

Som naar product

$$\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

Hoofdstuk 4

Meetkunde

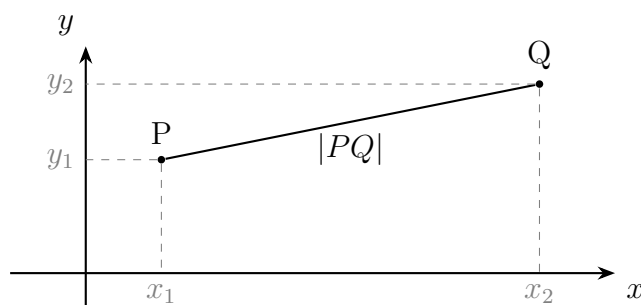
4.1 Vlakke meetkunde

4.1.1 Punten

Afstand twee punten

$$P(x_1, y_1) \wedge Q(x_2, y_2)$$

$$\Rightarrow d(P, Q) = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

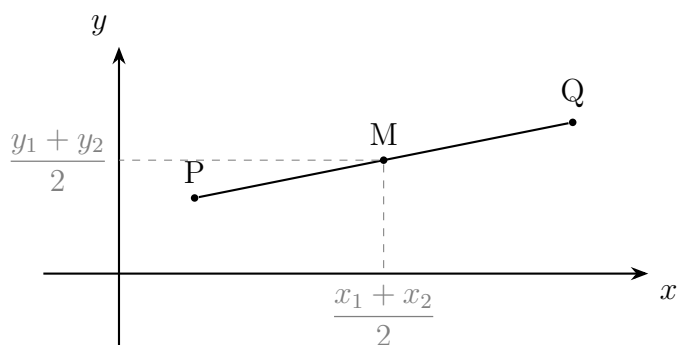


4.1.2 Rechten

Midden lijnstuk

$$P(x_1, y_1) \wedge Q(x_2, y_2) \wedge M = \text{midden}_{[PQ]}$$

$$\Rightarrow co(M) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



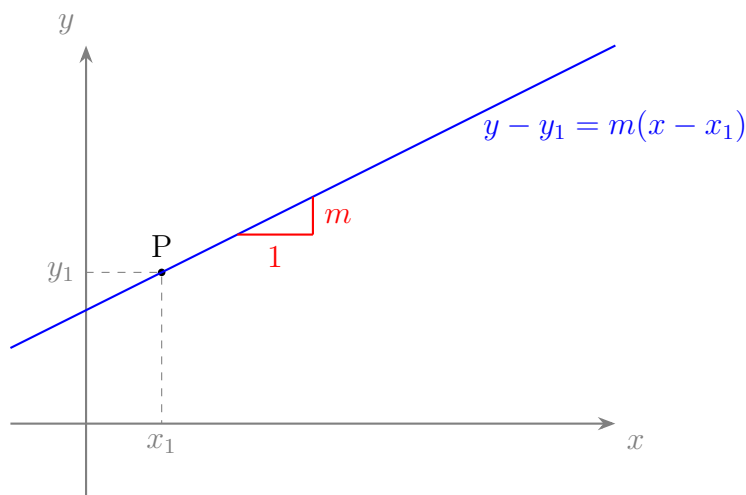
Vergelijking rechte

- Vergelijking van een rechte door punt $P(x_1, y_1)$ met rico m :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

of

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 0$$

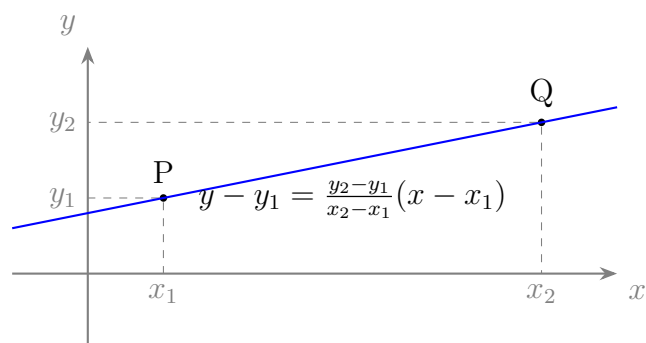


- Vergelijking van een rechte door punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

of

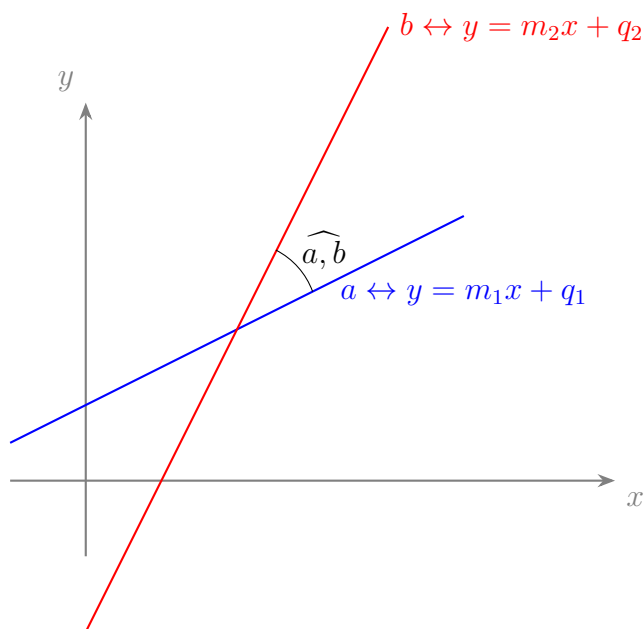
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Onderlinge ligging twee rechten Als

$$a \leftrightarrow y = m_1x + q_1 \wedge b \leftrightarrow y = m_2x + q_2$$

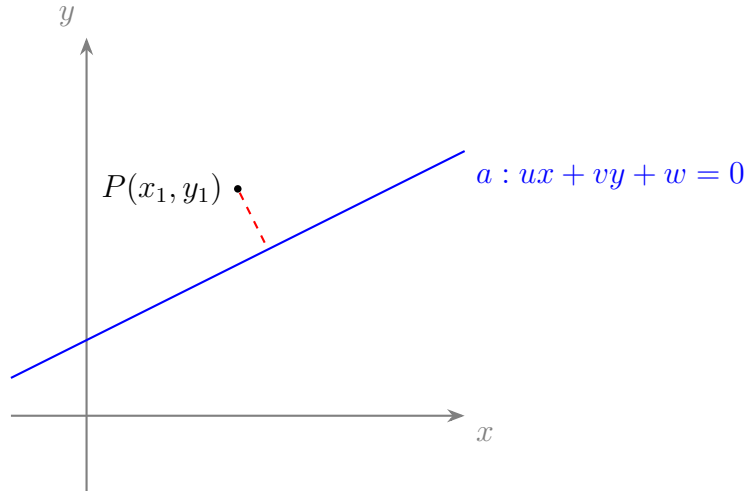
- dan wordt de hoek tussen a en b bepaald door $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{|1 + m_1m_2|}{\sqrt{1 + m_1^2}\sqrt{1 + m_2^2}}$
- dan is $a \parallel b$ als $m_1 = m_2$
- dan is $a \perp b$ als $m_1m_2 = -1$



Afstand punt tot rechte

$$P(x_1, y_1) \wedge a \leftrightarrow ux + vy + w = 0$$

$$\Rightarrow d(P, a) = \frac{|ux_1 + vy_1 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$



4.1.3 Driehoeken

Zwaartepunt driehoek

$$P(x_1, y_1) \wedge Q(x_2, y_2) \wedge R(x_3, y_3)$$

$$\Rightarrow co(Z) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

met $Z = \text{zwaartepunt}_{\Delta PQR}$

4.1.4 Cirkels

Definitie Cirkel met middelpunt M en straal r :

$$\mathcal{C}(M, r) = \{P \in \pi \mid d(P, M) = r\}$$

Vergelijking van de cirkel

$$P(x, y) \in \mathcal{C}(M(a, b), r)$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

4.2 Vlakke figuren

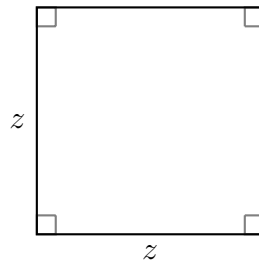
4.2.1 Begrippen

Oppervlakte: Hoeveelheid ruimte die de figuur inneemt.

Omtrek: Totale lengte van de rand van de figuur.

4.2.2 Figuren

Vierkant



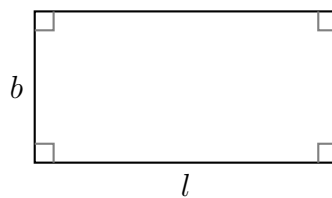
- Figuur met vier gelijke zijden en vier rechte hoeken (90°).
- $z =$ zijde
- Oppervlakte:

$$A = z^2$$

- Omtrek:

$$O = 4z$$

Rechthoek

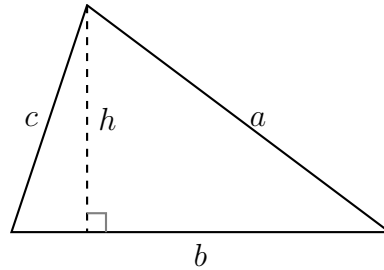


- Figuur met twee paar gelijke zijden en vier rechte hoeken (90°).
- $l =$ lengte
- $b =$ breedte
- Oppervlakte:

$$A = l \cdot b$$

- Omtrek:

$$O = 2l + 2b$$

Driehoek

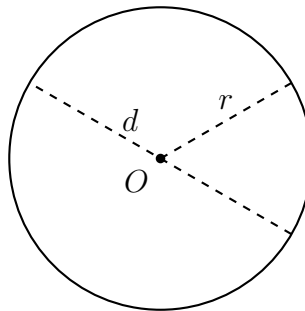
- Figuur met drie zijden en drie hoeken.
- b = basis
- h = hoogte
- Oppervlakte:

$$A = \frac{1}{2}b \cdot h$$

- Omtrek:

$$O = a + b + c$$

(waarbij a , b , en c de lengtes van de zijden zijn)

Cirkel

- Figuur waarbij alle punten op de rand op gelijke afstand van het middelpunt liggen.
- r = straal
- d = diameter
- O = middelpunt

- Oppervlakte:

$$A = \pi r^2$$

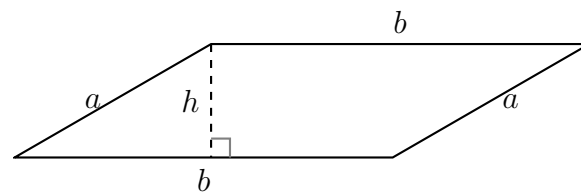
- Omtrek:

$$O = 2\pi r$$

of

$$O = \pi d$$

Parallelogram



- Figuur met twee paar evenwijdige zijden.

- b = basis

- h = hoogte

- Oppervlakte:

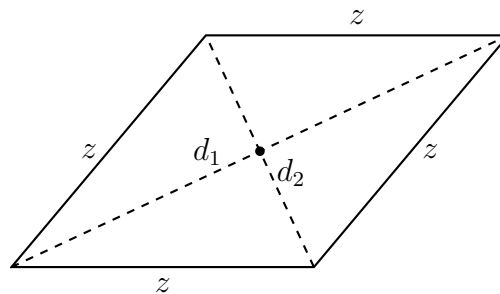
$$A = b \cdot h$$

- Omtrek:

$$O = 2a + 2b$$

(waarbij a en b de lengtes van de zijden zijn)

Ruit



- Figuur met vier gelijke zijden en tegenoverliggende hoeken die gelijk zijn.

- d_1 = lange diagonaal
- d_2 = korte diagonaal
- Oppervlakte:

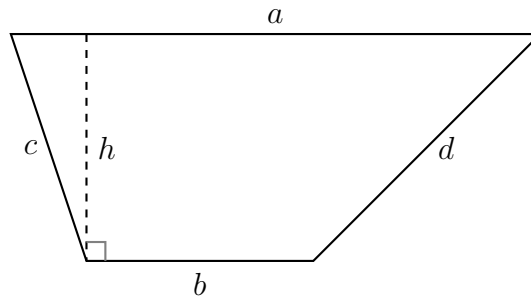
$$A = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

- Omtrek:

$$O = 4z$$

(waarbij z de lengte van de zijde is)

Trapezium



- Figuur met één paar evenwijdige zijden.
- a en b = lengtes van de evenwijdige zijden
- h = hoogte (afstand tussen de evenwijdige zijden)
- Oppervlakte:

$$A = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$$

- Omtrek:

$$O = a + b + c + d$$

(waarbij c en d de lengtes van de niet-evenwijdige zijden zijn)

Ellips

- Figuur waarbij de som van de afstanden van elk punt op de rand tot twee vaste punten (brandpunten) constant is.
- a = halve lange as (grote straal)

- b = halve korte as (kleine straal)

- Oppervlakte:

$$A = \pi \cdot a \cdot b$$

- Omtrek:

$$O \approx \pi[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}]$$

(benadering)

Vlieger

- Figuur met twee paar aangrenzende zijden die gelijk zijn.

- d_1 = lange diagonaal

- d_2 = korte diagonaal

- Oppervlakte:

$$A = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$$

- Omtrek:

$$O = 2a + 2b$$

(waarbij a en b de lengtes van de aangrenzende zijden zijn)

Regelmatige Veelhoek

- Figuur met gelijke zijden en hoeken.

- n = aantal zijden

- s = lengte van een zijde

- r = apothema (afstand van het middelpunt tot het midden van een zijde)

- Oppervlakte:

$$A = \frac{1}{2}n \cdot s \cdot r$$

- Omtrek:

$$O = n \cdot s$$

4.3 Synthetische ruimtemeetkunde

4.3.1 Axioma's

Grondbegrippen

symp	naam	elementen
Σ	ruimte: verz punten	$A, B, C, \dots$
$\mathcal{R}$	verz rechten in Σ	$a, b, c, \dots$
$\mathcal{P}$	verz vlakken in Σ	$\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Axioma's

- *De ruimte is een oneindige verzameling van punten.*
- *Een rechte is een oneindige niet-lege deelverzameling van de ruimte.*
- *Een vlak is een oneindige niet-lege deelverzameling van de ruimte.*
- *In elk vlak van de ruimte gelden de axioma's en stellingen van de vlakke meetkunde.*
- *Door drie niet-collineaire punten A , B en C gaat er precies één vlak.*
- *Als twee verschillende punten van een rechte tot een vlak behoren, dan ligt deze rechte in het vlak.*

Gevolgen

- Door twee verschillende punten gaat tenminste één vlak.
- Twee verschillende punten bepalen precies één rechte.
- Door een rechte gaan oneindig veel vlakken.

4.3.2 Onderlinge ligging

Twee vlakken α en β

- Samenvallend: $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$
- Strikt evenwijdig: $\alpha \cap \beta = \emptyset$
- Snijdend: $\alpha \cap \beta = \text{snijlijn } s$

Opmerking: evenwijdig = samenvallend of strikt evenwijdig

Rechte a en vlak α

- In: $a \parallel \alpha \wedge a \cap \alpha = a \Leftrightarrow a \subset \alpha$
- Strikt evenwijdig: $a \parallel \alpha \wedge a \cap \alpha = \emptyset$
- Snijdend: $a \cap \alpha = \mathbf{snijpunt} \{S\}$

Opmerking: evenwijdig = in of strikt evenwijdig

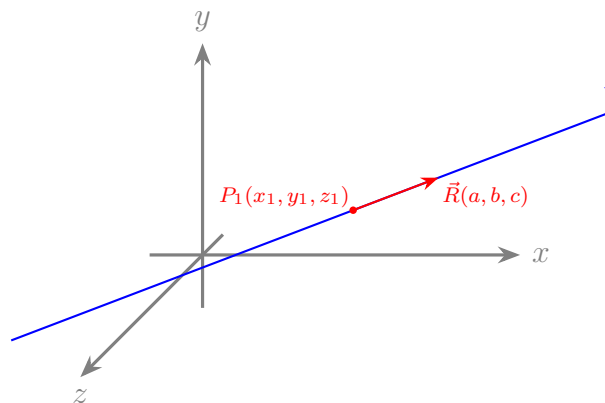
Twee rechten a en b

- Samenvallend: $a \cap b = a = b$
- Snijdend: $a \cap b = \mathbf{snijpunt} \{S\}$
- Strikt evenwijdig: $a \cap b = \emptyset \wedge a \parallel b$
- Kruisend: $a \cap b = \emptyset \wedge a \nparallel b$

Opmerking: evenwijdig = samenvallend of strikt evenwijdig

4.4 Analytische ruimtemeetkunde**4.4.1 Vergelijkingen rechte**

Rechte door een punt met een richtingsvector



rechte $t \leftrightarrow$ door $P_1(x_1, y_1, z_1)$ met rivec $\vec{R}(a, b, c)$

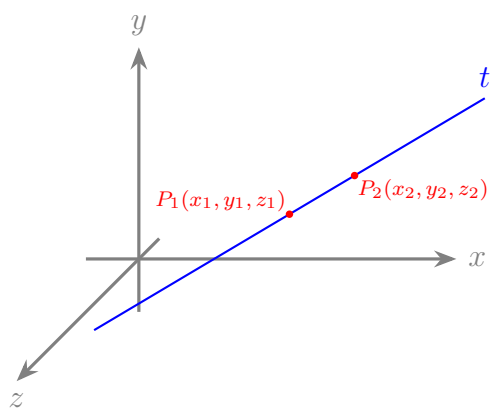
$$\leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + k \cdot \vec{R}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + k \cdot a \\ y = y_1 + k \cdot b \\ z = z_1 + k \cdot c \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\leftrightarrow \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}_0)$$

Rechte door twee punten



rechte $t \leftrightarrow$ door $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en $P_2(x_2, y_2, z_2)$

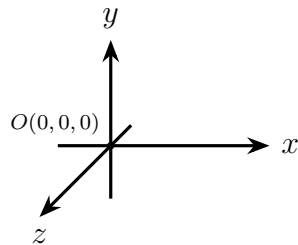
$$\leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + k \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + k \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + k \cdot (y_2 - y_1) \\ z = z_1 + k \cdot (z_2 - z_1) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\leftrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (x_2 \neq x_1, y_2 \neq y_1, z_2 \neq z_1)$$

Bijzondere rechten



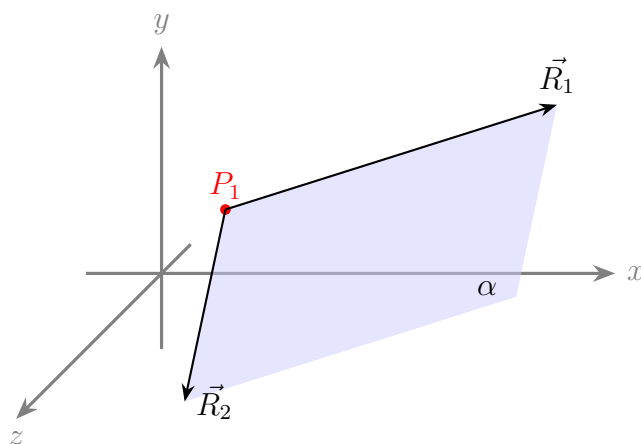
$$x\text{-as} \leftrightarrow y = z = 0$$

$$y\text{-as} \leftrightarrow x = z = 0$$

$$z\text{-as} \leftrightarrow x = y = 0$$

4.4.2 Vergelijkingen vlak

Vlak door punt met twee richtingsvectoren



vlak $\alpha \leftrightarrow$ door $P_1(x_1, y_1, z_1)$ met rivecs $\vec{R}_1(a_1, b_1, c_1)$ en $\vec{R}_2(a_2, b_2, c_2)$

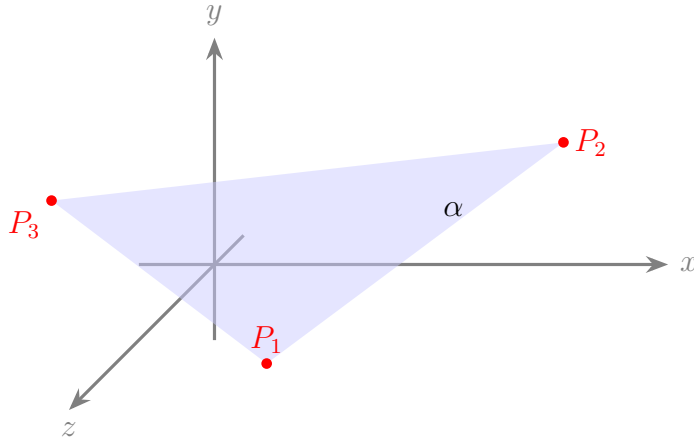
$$\leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + k \cdot \vec{R}_1 + l \cdot \vec{R}_2 \quad (k, l \in \mathbb{R})$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + k \cdot a_1 + l \cdot a_2 \\ y = y_1 + k \cdot b_1 + l \cdot b_2 \\ z = z_1 + k \cdot c_1 + l \cdot c_2 \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{R})$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (k, l \in \mathbb{R})$$

$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & a_1 & a_2 \\ y - y_1 & b_1 & b_2 \\ z - z_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Vlak door drie punten

vlak $\alpha \leftrightarrow$ door $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en $P_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + k \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) + l \cdot (\vec{P}_3 - \vec{P}_1) \quad (k, l \in \mathbb{R})$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + k \cdot (x_2 - x_1) + l \cdot (x_3 - x_1) \\ y = y_1 + k \cdot (y_2 - y_1) + l \cdot (y_3 - y_1) \\ z = z_1 + k \cdot (z_2 - z_1) + l \cdot (z_3 - z_1) \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{R})$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix} \quad (k, l \in \mathbb{R})$$

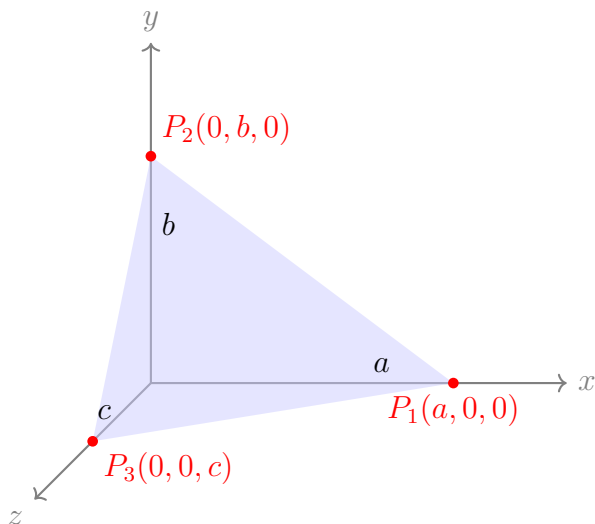
$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Algemene vorm van een vlak

$$\text{vlak } \alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$$

- u, v, w : richtingscoëfficiënten vlak
- $\vec{n} = (u, v, w)$: normaalvector, $\vec{n} \perp \alpha$
- t : constante term, positie t.o.v. $\vec{O}$
- $t = 0 \Leftrightarrow \vec{O} \in \alpha \Leftrightarrow \alpha = \alpha_O$

Vlak op assegmenten



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

- a : lengte snijlijn x -as
- b : lengte snijlijn y -as
- c : lengte snijlijn z -as
- a , b en c : de assegmenten

Bijzondere vlakken

- xy -vlak: $z = 0$
- xz -vlak: $y = 0$
- yz -vlak: $x = 0$

4.4.3 Onderlinge stand rechten

De rechten

$$e \leftrightarrow \vec{P}_e = \vec{P}_{e_1} + k \cdot \vec{R}_e$$

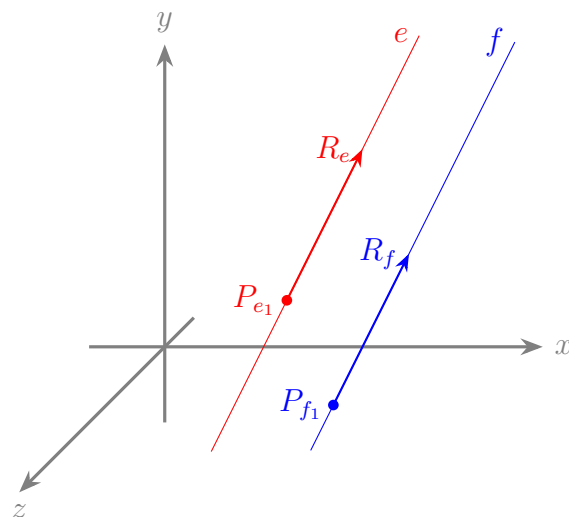
$$f \leftrightarrow \vec{P}_f = \vec{P}_{f_1} + l \cdot \vec{R}_f$$

met

$$P_{e_1}(x_1, y_1, z_1), R_e(a_1, b_1, c_1)$$

$$P_{f_1}(x_2, y_2, z_2), R_f(a_2, b_2, c_2)$$

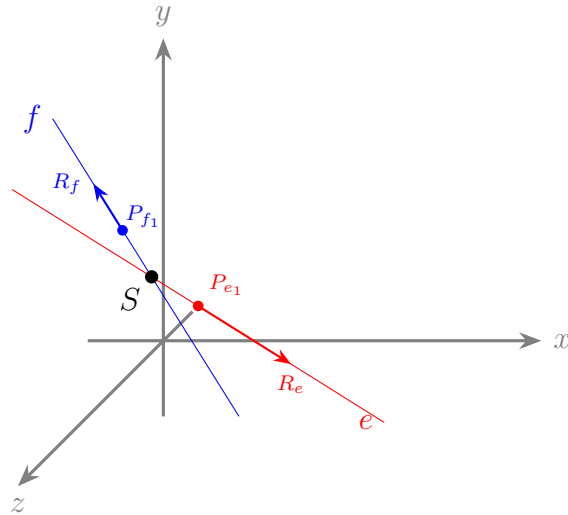
Evenwijdig



$$e \parallel f \Leftrightarrow \text{richtingsgetallen evenredig}$$

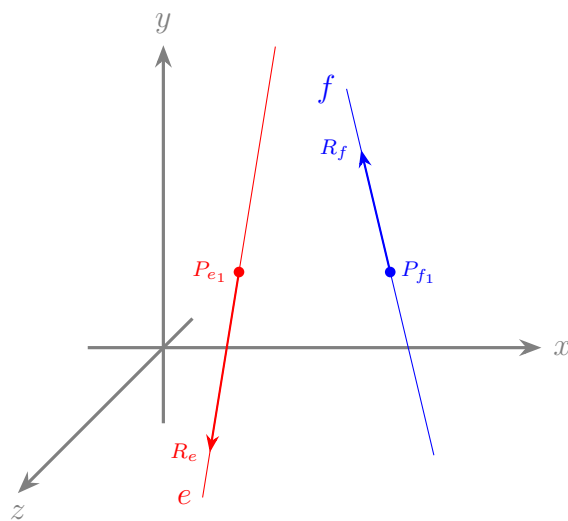
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : (a_1, b_1, c_1) = k \cdot (a_2, b_2, c_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Snijdend

e snijdt $f \Leftrightarrow \exists!$ oplossing $(k, l) : P_e = P_f$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1, b_1, c_1) \not\sim (a_2, b_2, c_2) \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Kruisend

$$e \text{ snijdt } f \Leftrightarrow \nexists \text{ oplossing } (k, l) : P_e = P_f$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1, b_1, c_1) \not\sim (a_2, b_2, c_2) \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$$

4.4.4 Onderlinge ligging rechte en vlak

$$\text{rechte } e \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + k \cdot a \\ y = y_1 + k \cdot b \\ z = z_1 + k \cdot c \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\text{vlak } \alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$$

Snijdend

$$e \text{ snijdt } \alpha \Leftrightarrow ua + vb + wc \neq 0$$

Evenwijdig

$$e \parallel \alpha \Leftrightarrow ua + vb + wc = 0$$

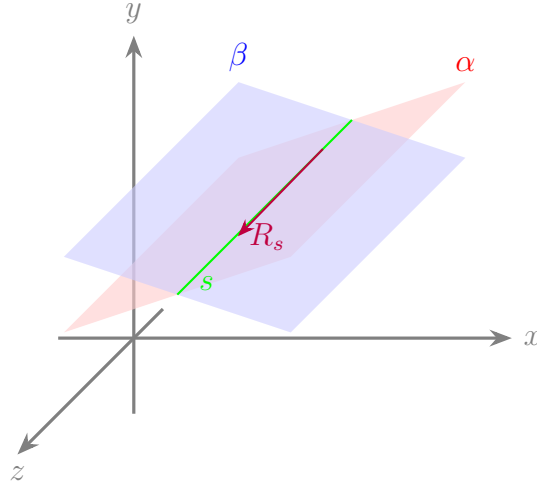
Rechte in het vlak

$$e \in \alpha \Leftrightarrow ua + vb + wc = 0 \wedge ux_1 + vy_1 + wz_1 + t = 0$$

4.4.5 Onderlinge ligging vlakken

$$\text{vlak } \alpha \leftrightarrow u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$$

$$\text{vlak } \beta \leftrightarrow u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$$

Snijdend

$$\alpha \text{ snijdt } \beta \Leftrightarrow (u_1, v_1, w_1) \not\sim (u_2, v_2, w_2)$$

- snijlijn: $s = \alpha \cap \beta$:
- richtingsgetallen snijlijn: $R_s(a, b, c)$:

$$a = \lambda \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

$$b = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix} \quad \lambda \text{ willekeurig } \in \mathbb{R}_0$$

$$c = \lambda \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

Evenwijdig

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow (u_1, v_1, w_1) \sim (u_2, v_2, w_2)$$

Samenvallend

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow (u_1, v_1, w_1, t_1) \sim (u_2, v_2, w_2, t_2)$$

4.5 Ruimtefiguren**4.5.1 Begrippen**

Volume: hoeveelheid ruimte die de figuur inneemt.

Oppervlakte: som van de oppervlakken van alle zijvlakken.

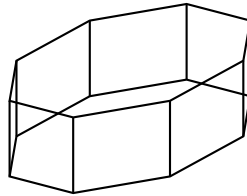
Net: 2D-weergave door zijvlakken uit te vouwen en in een vlak te leggen.

4.5.2 Figuren

Polyeder

3D-figuur met veelhoekige oppervlakken

Prisma



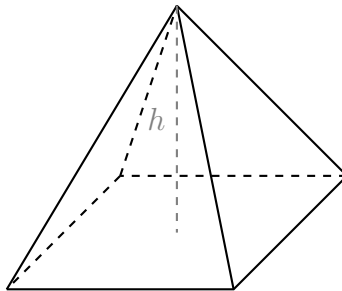
- Polyeder met evenwijdige, congruente bases verbonden door rechthoekige zijvlakken.
- B = basisoppervlakte
- h = hoogte
- P = omtrek basis
- Volume:

$$V = B \cdot h$$

- Oppervlakte:

$$A = 2B + P \cdot h$$

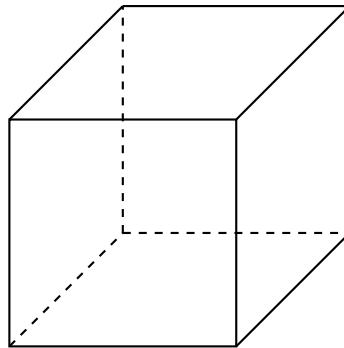
Piramide



- Polyeder met veelhoekige basis en driehoekige zijvlakken die samenkomen in een top.
- B = basisoppervlakte
- h = hoogte
- Volume:

$$V = \frac{1}{3}B \cdot h$$

Kubus



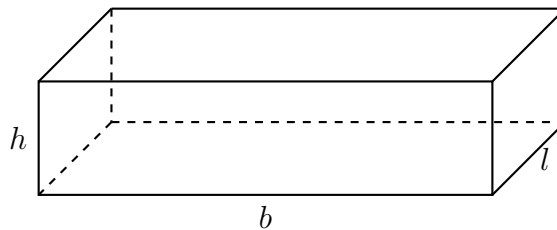
- Prisma met zes vierkante zijvlakken, gelijke zijden en 90° hoeken.
- z = zijde
- Volume:

$$V = z^3$$

- Oppervlakte:

$$A = 6z^2$$

Balk



- Prisma met zes rechthoekige zijvlakken.
- l = lengte

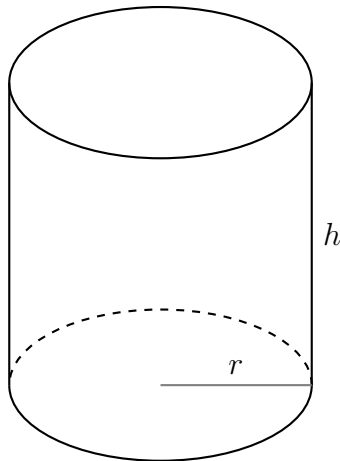
- b = breedte
- h = hoogte
- Volume:

$$V = l \cdot b \cdot h$$

- Oppervlakte:

$$A = 2lb + 2lh + 2bh$$

Cilinder

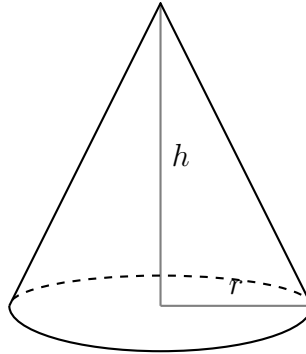


- 3D-figuur met congruente cirkelvormige bases verbonden door een gekromd oppervlak.
- r = straal
- h = hoogte
- Volume:

$$V = \pi r^2 h$$

- Oppervlakte:

$$A = 2\pi r(r + h)$$

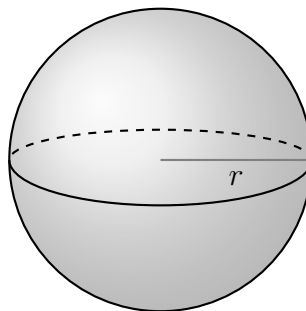
Kegel

- 3D-figuur met cirkelvormige basis en gekromd oppervlak dat naar één top loopt.
- r = straal
- h = hoogte
- l = schuine hoogte
- Volume:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

- Oppervlakte:

$$A = \pi r(r + l)$$

Bol

- 3D-figuur met punten op gelijke afstand van het middelpunt.
- r = straal
- Volume:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Oppervlakte:

$$A = 4\pi r^2$$

4.6 Vectoren

4.6.1 Definities van vectoren

gebonden vector $\vec{v} = \vec{AB}$ een lijnstuk met

- een beginpunt A
- een eindpunt B
- een lengte $|AB|$
- een richting, rechte AB
- een zin, $A \rightarrow B$

vrije vector een verzameling lijnstukken met

- zelfde lengte
- zelfde richting
- zelfde zin

representant één willekeurig lijnstuk uit de vrije vector

plaatsvector $\vec{A} = \vec{OA}$ met O de oorsprong

nulvector $\vec{0}$: lengte 0

Notatie: $\vec{u}, \vec{v}, \dots$

Verzameling: $\mathcal{V}$

coördinaat $co(\vec{A}) = co(A) = (x, y, z)$

norm van $\vec{v} = \vec{AB}$ is afstand tussen A en B

$$\|\vec{v}\| = |AB|$$

4.6.2 Optellen van vectoren

Formule van Chasles-Möbius

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Met coördinaten

$$\left. \begin{aligned} co(\vec{u}) &= (x_1, y_1, z_1) \\ co(\vec{v}) &= (x_2, y_2, z_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$co(\vec{u} + \vec{v}) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Eigenschappen

- I: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} : \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{V}$
- A: $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V} : (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- N: $\exists \vec{o} \in \mathcal{V}, \forall \vec{u} \in \mathcal{V} : \vec{u} + \vec{o} = \vec{u} = \vec{o} + \vec{u}$
- S: $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \exists ! -\vec{u} \in \mathcal{V} : \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o} = (-\vec{u}) + \vec{u}$
- C: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} : \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$\Rightarrow \mathcal{V}, +$ is een commutatieve groep

4.6.3 Scalaire vermenigvuldiging van vectoren

Definitie

$$r \cdot \vec{v} (r \in \mathbb{R}_0, \vec{v} \in \mathcal{V}_o)$$

is een vector met

- lengte gelijk aan $|r| \cdot \|\vec{v}\|$
- richting zoals $\vec{v}$
- zin $\begin{cases} \text{zoals } \vec{v} & (r > 0) \\ \text{tegengesteld } \vec{v} & (r < 0) \end{cases}$

$$0 \cdot \vec{v} = \vec{o}$$

$$r \cdot \vec{o} = \vec{o}$$

Met coördinaten

$$co(\vec{v}) = (x, y, z) \Rightarrow$$

$$co(r\vec{v}) = (rx, ry, rz)$$

Eigenschappen

- $\forall r \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in \mathcal{V} : r \cdot \vec{v} \in \mathcal{V}$
- $\forall r, s \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in \mathcal{V} : r \cdot (s \cdot \vec{v}) = (r \cdot s) \cdot \vec{v}$
- $\forall r \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} : r \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = r \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v}$
- $\forall r, s \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in \mathcal{V} : (r + s) \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v}$
- $\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in \mathcal{V} : 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

4.6.4 Norm van een vector**Definitie**

norm van $\vec{v} = \vec{AB}$ is afstand tussen A en B

$$\|\vec{v}\| = d(A, B) = |AB|$$

Met coördinaten

$$co(\vec{v}) = (x, y, z) \Rightarrow$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ongelijkheid van Minkowski

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

4.6.5 Inproduct van twee vectoren**Definitie**

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}_0$ en ϕ hoek tussen $\vec{u}$ en $\vec{v} \Rightarrow$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \phi$$

Met coördinaten

$$\left. \begin{array}{l} co(\vec{u}) = (x_1, y_1, z_1) \\ co(\vec{v}) = (x_2, y_2, z_2) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Hoofdstuk 5

Reële functies

5.1 Reële functies

5.1.1 Definities

Reële functie: een verzameling van *koppels* reële getallen (x, y) , zodat elk getal x *hoogstens één beeld* y heeft.

Notatie: $f, g, h, f_1, f_2, \dots$

Terminologie: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

- x argument, onafhankelijke veranderlijke, abscis, x -waarde
- y beeld, afhankelijke veranderlijke, ordinaat, y -waarde
- $\in$ element van
- $\mathbb{R}^2$ verzameling van alle koppels reële getallen

Voorstellingswijzen:

- functievoorschrift: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$
- functiewaardentabel
- grafiek

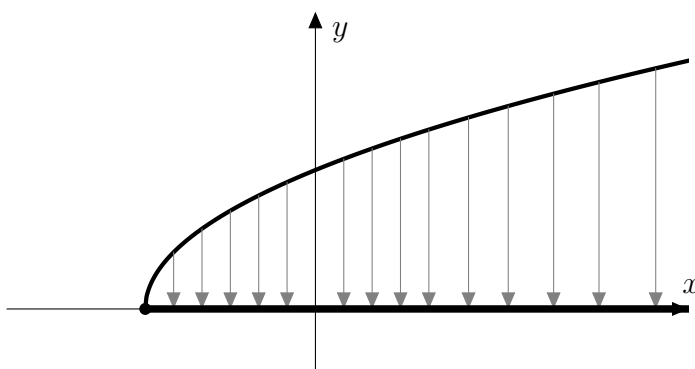
5.1.2 Karakteristieken van reële functies

Domein

Definitie: de verzameling van alle x -waarden waarvoor de functie een beeld heeft.

Notatie: $\text{dom } f$

Grafisch:

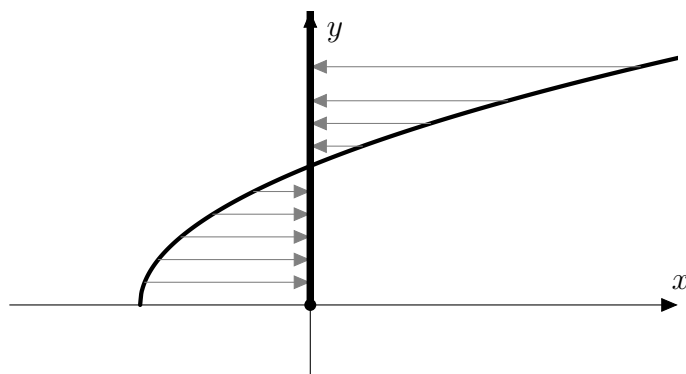


Bereik

Definitie: de verzameling van alle beelden van een functie.

Notatie: $\text{ber } f$

Grafisch:



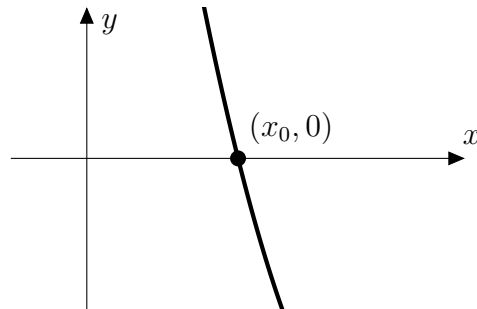
Nulwaarden

Definitie: een x -waarde waarvoor geldt dat het beeld gelijk is aan nul.

Algebraïsch: Stel $y = 0$ in $y = f(x)$. Dus zoek alle x waarvoor

$$f(x) = 0$$

Grafisch:



Tekenverloop

Definitie: nagaan welk teken (positief, negatief of nul) het beeld y heeft als het argument x het domein doorloopt.

Werkwijze: Tekenschema met $+$, $-$, 0 en $|$

Stijgen en dalen

Definities:

- f is **stijgend** in een interval I als voor de x -waarden $a, b \in I$ met $a < b$ geldt

$$f(a) \leq f(b)$$

- f is **dalend** in een interval I als voor de x -waarden $a, b \in I$ met $a < b$ geldt

$$f(a) \geq f(b)$$

- f die zowel stijgend als dalend is in een interval I noemen we **constant** op dat interval I

Werkwijze: Schema met $\nearrow$ en $\searrow$

Extrema

Definities:

- reëel getal m is het **minimum** van f op een interval I indien er voor alle $x \in I$ geldt

$$f(x) \geq m .$$

- reëel getal M is het **maximum** van f op een interval I indien er voor alle $x \in I$ geldt

$$f(x) \leq M .$$

Werkwijz: In schema met $\nearrow$ en $\searrow$ ook min/max

5.2 Veeltermen

5.2.1 Veelterm

Veelterm is som ééntermen:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= \sum_{i=0}^n a_i x^i \end{aligned}$$

- x : veranderlijke
- $a_i \in \mathbb{R}$: coëfficiënten
- **graad** $gr(P(x))$: hoogste exponent van x in P
- **getalwaarde** van $P(x)$ voor een gegeven a : x vervangen door a
- **nulwaarde**: alle a waarvoor $P(a) = 0$

5.2.2 Graad na bewerkingen

$$\begin{aligned} gr(A(x) + B(x)) &\leq \max(gr(A(x)), gr(B(x))) \\ gr(A(x) \cdot B(x)) &= gr(A(x)) + gr(B(x)) \end{aligned}$$

5.2.3 Euclidische deling

$$A(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$\text{met } gr(R(x)) < gr(D(x)) \vee R(x) = 0$$

- $A(x)$: deeltal
- $D(x) \neq 0$: deler
- $Q(x)$: quotiënt
- $R(x)$: rest
- **opgaande deling:** $R(x) = 0$
- **niet-opgaande deling:** $R(x) \neq 0$
- $gr(A(x)) < gr(D(x)) \Rightarrow Q(x) = 0 \wedge R(x) = A(x)$
- $Q(x)$ en $R(x)$ bestaan en zijn enig

5.3 Veeltermfuncties

5.3.1 Algemeen

Veeltermfunctie: een reële functie met functievoorschrift

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Graad: n -de graad

5.3.2 Veeltermfuncties van graad 0

- Synoniem: **constante functies**
- Vorm:

$$f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$$

- Grafiek: horizontale rechte evenwijdig met de x -as.
- Domein: $\mathbb{R}$
- Bereik: $\{a\}$
- Snijpunt y -as: $(0, a)$

- Nulwaarden:

$$\begin{cases} \text{geen} & (a \neq 0) \\ \text{elke } x \in \mathbb{R} & (a = 0) \end{cases}$$

- Tekenverloop:

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f(x) & & \text{teken van } a & \end{array}$$

5.3.3 Veeltermfuncties van graad 1

- Synoniemen: **eerstegraadsfuncties**, lineaire functies

- Vorm:

$$f(x) = ax + b \quad (a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R})$$

- Grafiek: schuine rechte

$$\begin{cases} \text{stijgende schuine rechte} \nearrow & (a > 0) \\ \text{dalende schuine rechte} \searrow & (a < 0) \end{cases}$$

- Richtingcoëfficiënt: a maat voor de helling

- Domein: $\mathbb{R}$

- Bereik: $\mathbb{R}$

- Nulwaarde: $x_0 = -\frac{b}{a}$

- Snijpunt x -as: $(-\frac{b}{a}, 0)$.

- Snijpunt y -as: $(0, b)$

- Tekenverloop:

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f(x) & & \begin{array}{c} \text{tegengesteld} \\ \text{teken } a \end{array} & \begin{array}{c} -\frac{b}{a} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{teken} \\ a \end{array} \end{array}$$

- Extrema: geen

5.3.4 Veeltermfuncties van graad 2

- Synoniemen: **tweedegraadsfuncties**, kwadratische functies

- Vorm:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \in \mathbb{R}_0, b, c \in \mathbb{R})$$

- Domein: $\mathbb{R}$.

- Bereik:

$$\begin{cases} \text{ber } f = [f(-\frac{b}{2a}), +\infty[& (a > 0) \\ \text{ber } f =] -\infty, f(-\frac{b}{2a})] & (a < 0) \end{cases}$$

- Nulwaarden: $ax^2 + bx + c = 0$

– $D = b^2 - 4ac$

- $D > 0 \Rightarrow$ twee verschillende nulwaarden

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

- $D = 0 \Rightarrow$ één nulwaarde

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- $D < 0 \Rightarrow$ geen nulwaarden

- Tekenverloop:

- $D > 0$

x		x_1		x_2
$f(x)$		teken a	0	tegengesteld teken a
			0	teken a

- $D = 0$

x		$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$			teken a	0	teken a	

- $D < 0$

x		$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$			teken a	

- Grafiek: parabool met symmetrieas evenwijdig met de y -as

- $a > 0 \Rightarrow$ **dalparabool**

– $a < 0 \Rightarrow$ **bergparabool**

- Top:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) \\ &= \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right) \end{aligned}$$

met $D = b^2 - 4ac$

- Stijgen en dalen:

– $a < 0$

x	$-\frac{b}{2a}$
$f(x)$	$\nearrow \max_{=f(-\frac{b}{2a})} \searrow$

– $a > 0$

x	$-\frac{b}{2a}$
$f(x)$	$\searrow \min_{=f(-\frac{b}{2a})} \nearrow$

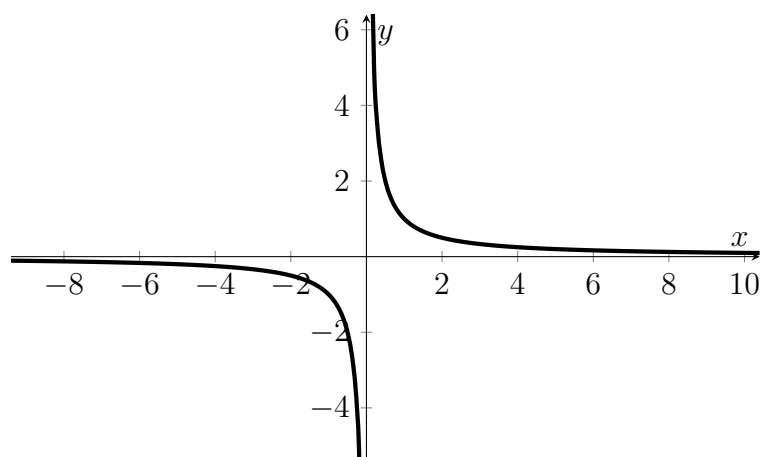
5.4 Rationale functies

5.4.1 Basisfunctie

Vorm:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Grafiek: Hyperbool



Domein:

$$\text{dom } f = \mathbb{R}_0$$

Bereik:

$$\text{ber } f = \mathbb{R}_0$$

Nulwaarden:

$$\text{nulp } f : /$$

Asymptoten:

$$\text{H.A. : } y = 0$$

$$\text{V.A. : } x = 0$$

5.4.2 Homografische functies

Vorm:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0 \wedge a \cdot d \neq b \cdot c)$$

Bespreken:

- Functievoorschrift: $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$.
- polen f : $-\frac{d}{c}$
- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{\text{polen}\}$
- nulw f : $\begin{cases} x_0 = -\frac{b}{a} & (a \neq 0) \\ \text{geen} & (a = 0) \end{cases}$
- V.A.: $x = \text{polen}$
- H.A.: $y = \frac{\text{coëff } x}{\text{coëff } x}$
- $\text{ber } f = \mathbb{R} \setminus \{\text{H.A.}\}$
- Tekenvoortekening: door splitsen in teller en noemer
- Snijpunten bepalen
- Grafiek schetsen
- Stijgen en dalen: a.d.h.v. de grafiek

5.4.3 Rationale functies

Vorm:

$$y = \frac{t(x)}{n(x)}$$

- $t(x)$: teller, veeltermfunctie
- $n(x)$: noemer, veeltermfunctie

5.5 Exponentiële functies

5.5.1 Exponentiële functies

Vorm:

$$f(x) = a^x \quad (a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\})$$

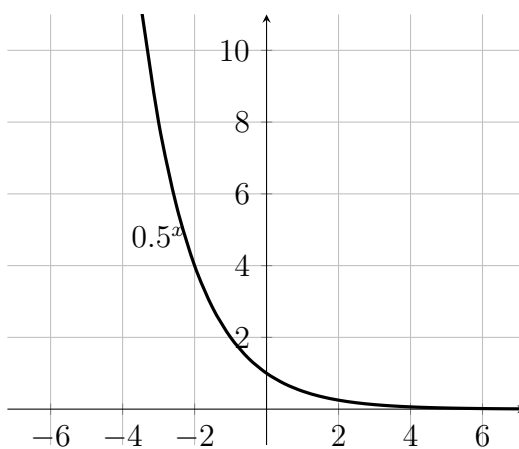
- a : grondtal
- x : exponent

Karakteristieken

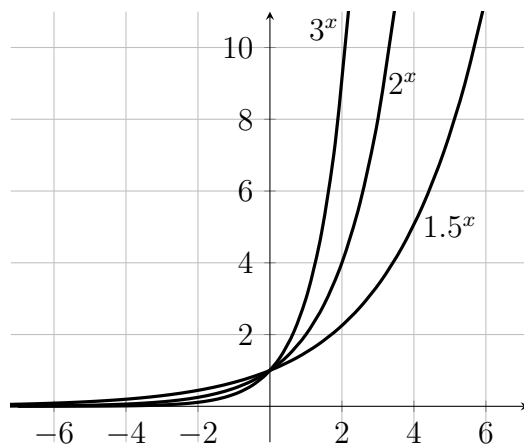
- Domein: $\mathbb{R}$
- Bereik: $\mathbb{R}_0^+$
- Nulwaarden: geen
- Bijzondere punten: $(0, 1)$, $(1, a)$

Grafiek

- $0 < a < 1$



- $a > 1$



5.6 Logaritmische functies

5.6.1 Logaritmische functie

Vorm:

$$f(x) = \log_a x$$

- a : grondtal $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$
- x : argument

Karakteristieken:

- $\text{dom } \log_a x = \mathbb{R}_0^+$
- $\text{ber } \log_a x = \mathbb{R}$
- Bijzondere punten: $(1, 0)$, $(a, 1)$
- $a > 1$
 - $\log_a x$ is stijgend in $\mathbb{R}_0^+$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$
- $0 < a < 1$
 - $\log_a x$ is dalend in $\mathbb{R}_0^+$

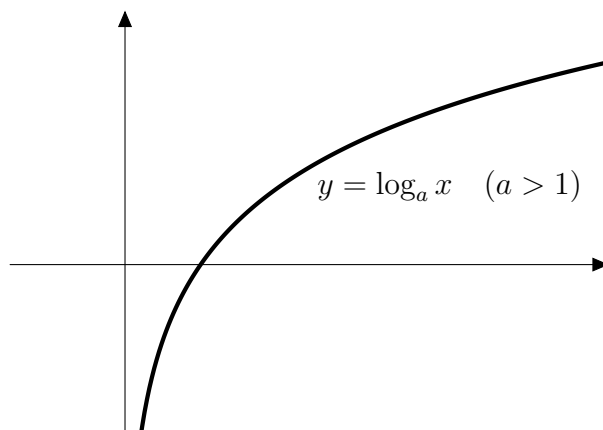
$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

- Asymptoten:

$$- \text{V.A.: } y\text{-as met vergelijking } x = 0$$

Grafiek:



5.6.2 Hoofdeigenschap logaritmische functies

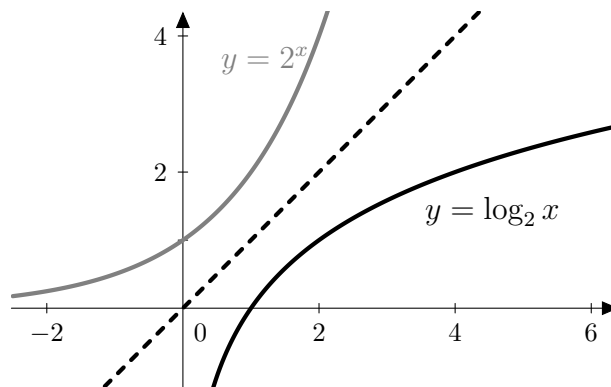
Eigenschap: De logaritmische functie met grondtal a en de exponentiële functie met grondtal a zijn inverse functies.

In symbolen:

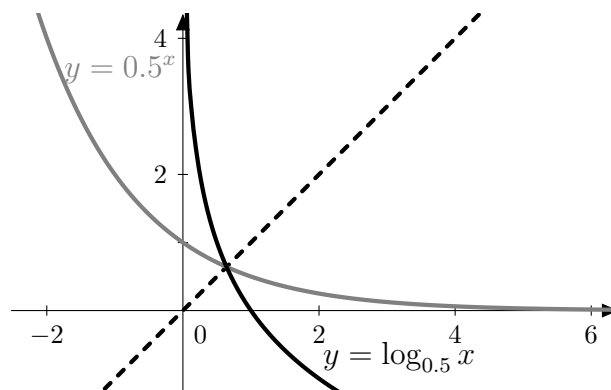
$$f(x) = a^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

Grafisch: De grafieken van de logaritmische en exponentiële functies zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de eerste bissectrice in een orthonormaal assenstelsel.

- $a > 1$



- $0 < a < 1$



5.7 Goniometrische functies

5.7.1 Sinusfunctie

Vorm:

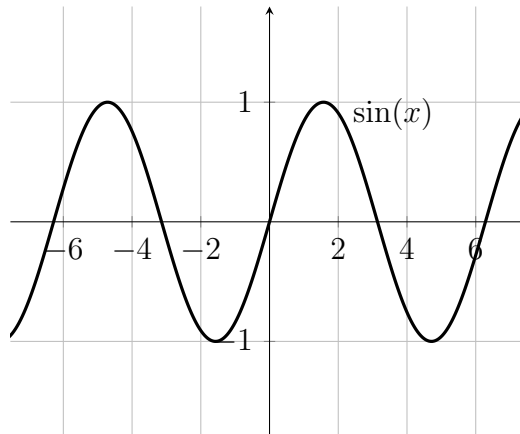
$$f(x) = a \sin(bx + c) + d$$

Karakteristieken:

- Amplitude: $|a|$
- Periode: $T = \frac{2\pi}{|b|}$
- Faseverschuiving: $-\frac{c}{b}$
- Verticale verschuiving: d

- Domein: $\mathbb{R}$
- Bereik: $[d - |a|, d + |a|]$

Grafiek:



5.7.2 Cosinusfunctie

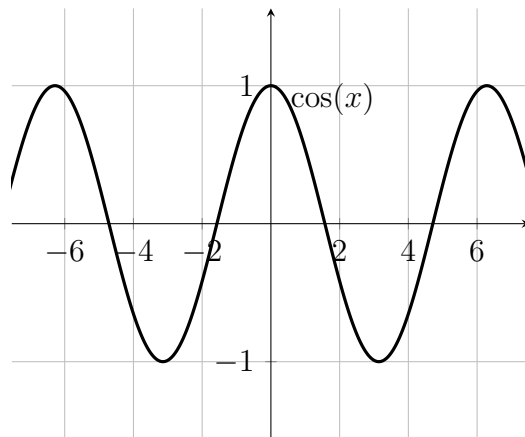
Vorm:

$$f(x) = a \cos(bx + c) + d$$

Karakteristieken:

- Amplitude: $|a|$
- Periode: $T = \frac{2\pi}{|b|}$
- Faseverschuiving: $-\frac{c}{b}$
- Verticale verschuiving: d
- Domein: $\mathbb{R}$
- Bereik: $[d - |a|, d + |a|]$

Grafiek:



5.7.3 Tangensfunctie

§

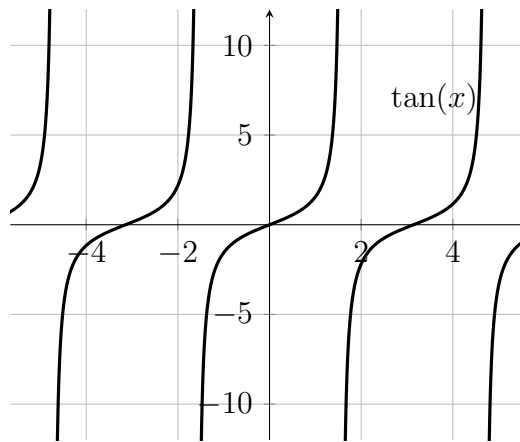
Vorm:

$$f(x) = a \tan(bx + c) + d$$

Karakteristieken:

- Periode: $T = \frac{\pi}{|b|}$
- Faseverschuiving: $-\frac{c}{b}$
- Verticale verschuiving: d
- Domein: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Bereik: $] -\infty, +\infty[$

Grafiek:



Hoofdstuk 6

Analyse

6.1 Limieten

6.1.1 Definitie limiet

b is de **limiet** van f voor x gaande naar a

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \text{dom } f :$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$$

6.1.2 Rekenregels limieten

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{met } c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)^{g(x)}) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)^n) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

6.1.3 Rekenregels oneindig

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$k + (+\infty) = +\infty$$

$$k + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$k \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & (k > 0) \\ -\infty & (k < 0) \end{cases}$$

$$k \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & (k > 0) \\ +\infty & (k < 0) \end{cases}$$

$$\frac{k}{+\infty} = 0$$

$$\frac{k}{-\infty} = 0$$

$$\frac{k}{0} = +\infty \text{ of } -\infty$$

6.1.4 Voorlopig onbepaalde vormen

$$(\pm\infty) - (\pm\infty), \quad (\pm\infty) + (\mp\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{k}{0}$$

$$0 \cdot (\pm\infty), \quad 1^{\pm\infty}, \quad 0^0, \quad (\pm\infty)^0$$

6.1.5 Basislimieten

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow a} c &= c & (c \in \mathbb{R}) \\
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} c &= c \\
 \lim_{x \rightarrow a} x &= a \\
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x &= \pm\infty \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k &= +\infty & (k \in \mathbb{N}_0) \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k &= \begin{cases} +\infty & (k \text{ is even}) \\ -\infty & (k \text{ is oneven}) \end{cases} \\
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} &= 0 \\
 \lim_{x \underset{<}{\rightarrow} 0} \frac{1}{x} &= -\infty \\
 \lim_{x \underset{>}{\rightarrow} 0} \frac{1}{x} &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

6.1.6 Limieten van een veeltermfuncties

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{met } f(x) \text{ een veeltermfunctie en } a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

6.1.7 Limiet van een rationale functie

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \quad \text{als } g(a) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{k}{0} = \underbrace{+\infty \text{ of } -\infty}_{\text{tekenonderzoek}} \quad \text{als } f(a) \neq 0 \text{ en } g(a) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a) f_r(x)}{(x-a) \underbrace{g_r(x)}_{\text{Horner}}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_r(x)}{g_r(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)}{(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

6.1.8 Limieten van goniometrische functies

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= 0\end{aligned}$$

6.1.9 Bijzondere limieten

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e \quad (n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

6.1.10 Regel van de l'Hospital

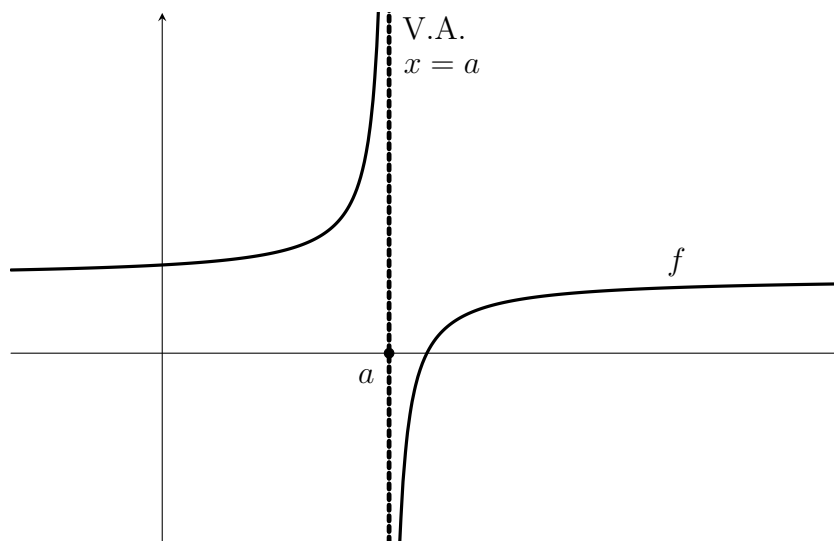
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{0}{0} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

6.2 Asymptoten

6.2.1 Verticale asymptoten (V.A.)

Grafisch

Een **verticale asymptoot** van f is een verticale rechte die op oneindig de kromme van f benadert.



Algebraïsch

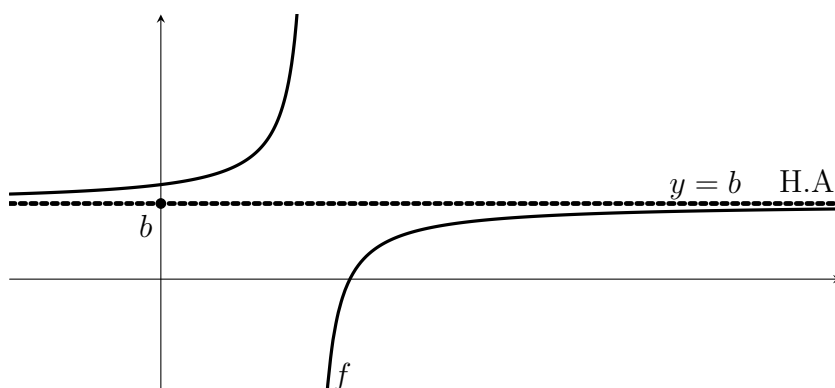
De rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** van f in $a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

6.2.2 Horizontale asymptoten (H.A.)

Grafisch

Een **horizontale asymptoot** van f is een horizontale rechte die op oneindig de kromme van f benadert.



Algebraïsch

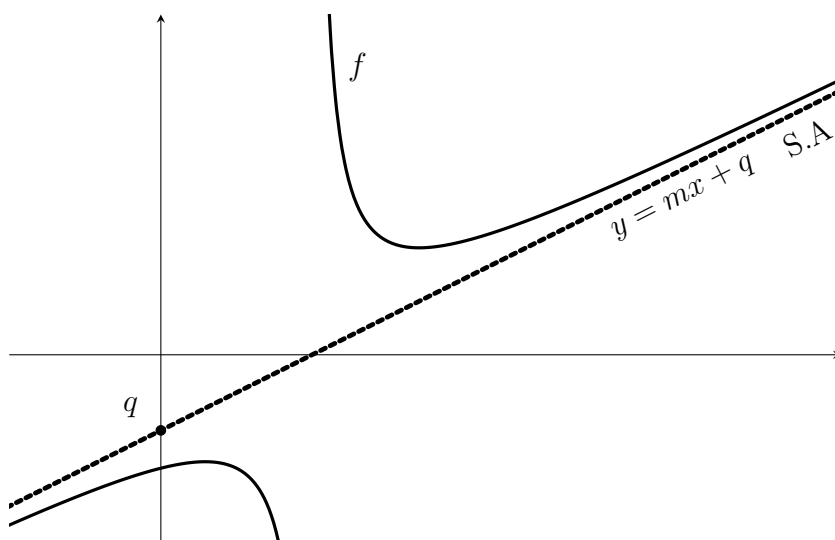
De rechte $y = b$ is een **horizontale asymptoot** van f

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$$

6.2.3 Schuine asymptoten (S.A.)

Grafisch

Een **schuine asymptoot** van f is een schuine rechte die op oneindig de kromme van f benadert.



Algebraïsch

De rechte $y = mx + q$ is een **schuine asymptoot** van f

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx - q) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) \end{cases} \end{aligned}$$

6.3 Afgeleiden**6.3.1 Afgeleide waarde**

$f'(a)$ is de **afgeleide waarde** van f in a

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &\Leftrightarrow f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

6.3.2 Basisafgeleiden

$$\begin{aligned} (c)' &= 0 \\ (x)' &= 1 \\ (x^2)' &= 2x \\ (x^3)' &= 3x^2 \\ (x^n)' &= n \cdot x^{n-1} \\ (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

6.3.3 Afgeleiden van exponentiële en logaritme

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

6.3.4 Goniometrische afgeleiden

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

6.3.5 Eigenschappen van afgeleiden

Somregel

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Veelvoudregel

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

Productregel

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quotiëntregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Kettingregel

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

6.3.6 Hogere afgeleiden

Aantal	f'	Df	$\frac{df}{dx}$
eerste afgeleide	f'	Df	$\frac{df}{dx}$
tweede afgeleide	f''	D^2f	$\frac{d^2f}{dx^2}$
$\vdots$			
n -de afgeleide	$f^{(n)}$	$D^n f$	$\frac{d^n f}{dx^n}$

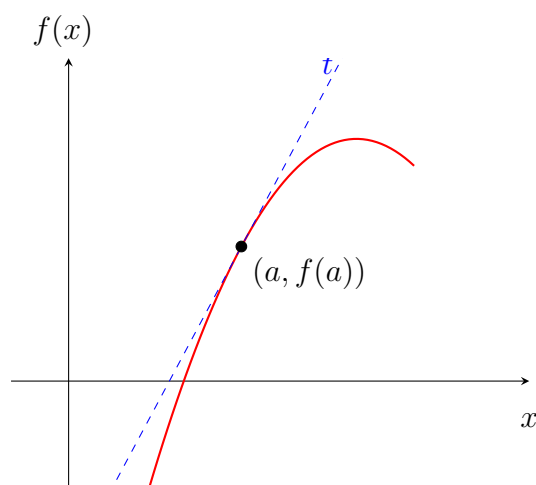
- f' : Lagrange's notatie
- Df : Euler's notatie
- $\frac{df}{dx}$: Leibniz's notatie

6.4 Functieonderzoek**6.4.1 Raaklijn****Definitie**

De **raaklijn** aan de grafiek van f voor $x = a$:

- punt: $(a, f(a))$
- richtingscoëfficiënt: $f'(a)$
- vergelijking:

$$t \leftrightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a)$$



6.4.2 Stijgen en dalen van een functie

Stijgen en dalen in een interval

- f is stijgend in $[a, b]$ als

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- f is dalend in $[a, b]$ als

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- f is strikt stijgend in $[a, b]$ als

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- f is strikt dalend in $[a, b]$ als

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Stijgen en dalen in een punt

- f is stijgend in $a \in \text{dom} f$ als

$$\exists B(a, \delta) : f \text{ stijgt in }]a - \delta, a + \delta[\cap \text{dom} f$$

- f is dalend in $a \in \text{dom} f$ als

$$\exists B(a, \delta) : f \text{ daalt in }]a - \delta, a + \delta[\cap \text{dom} f$$

Eigenschappen

f afleidbaar over $[a, b]$ dan $\forall x \in]a, b[$:

- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ is strikt stijgend in $[a, b]$
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ is strikt dalend in $[a, b]$
- $f'(x) = 0 \Rightarrow f$ is constant in $[a, b]$

f afleidbaar in a :

- f stijgt in $a \Leftrightarrow f'(a) \geq 0$
- f daalt in $a \Leftrightarrow f'(a) \leq 0$

Stelling van Rolle

$$\begin{cases} f \text{ is continue in } [a, b] \\ f \text{ is afleidbaar in }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$$

Middelwaardestelling van Lagrange

$$\begin{cases} f \text{ is continue in } [a, b] \\ f \text{ is afleidbaar in }]a, b[\end{cases} \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

6.5 Rijen en reeksen**6.5.1 Rijen**

Rij: een afbeelding

$$(u_n) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

Notatie: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

Term: element van de rij

Expliciet voorschrift: term u_n kan berekend worden door n in te vullen

$$u_n = u(n)$$

Impliciet voorschrift: (recursief voorschrift) term u_n berekenen door termen met lagere index te gebruiken

$$u_n = u(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$$

Partiële som: som van de eerste n termen

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= \sum_{i=1}^n u_i$$

Convergentie:

- $(u_n)_n$ is **convergent**

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in \mathbb{R}$$

- $(u_n)_n$ is **divergent**

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty / -\infty \\ \text{bestaat niet} \end{cases}$$

6.5.2 Rekenkundige rijen

Definitie: Een **rekenkundige rij** (RR) is een rij waarbij elke term u_n de som is van de vorige term u_{n-1} met een constant getal v (het **verschil**).

Impliciet voorschrift: $u_n = u_{n-1} + v$

Expliciet voorschrift: $u_n = u_1 + (n-1)v$

Partiële som: $s_n = \frac{n \cdot (u_1 + u_n)}{2}$

Convergentie:

- RR divergent $\Leftrightarrow v \neq 0$
- RR convergent $\Leftrightarrow v = 0$

$$\Rightarrow (u_n)_n \longrightarrow u_1$$

6.5.3 Meetkundige rijen

Definitie: Een **meetkundige rij** (MR) is een rij waarbij elke term u_n het product is van de vorige term u_{n-1} met een constant getal q (het **quotiënt** of de **reden**).

Impliciet voorschrift: $u_n = u_{n-1} \cdot q$

Expliciet voorschrift: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

Partiële som: $s_n = \begin{cases} u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} & (q \neq 1) \\ n \cdot u_1 & (q = 1) \end{cases}$

Convergentie:

- $u_1 \neq 0 \wedge -1 < q \leq 1 \Rightarrow$ MR convergent
- $u_1 = 0 \Rightarrow$ MR convergent
- $u_1 \neq 0 \wedge q \leq -1 \vee q > 1 \Rightarrow$ MR divergent

6.5.4 Harmonische rij

$$(u_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

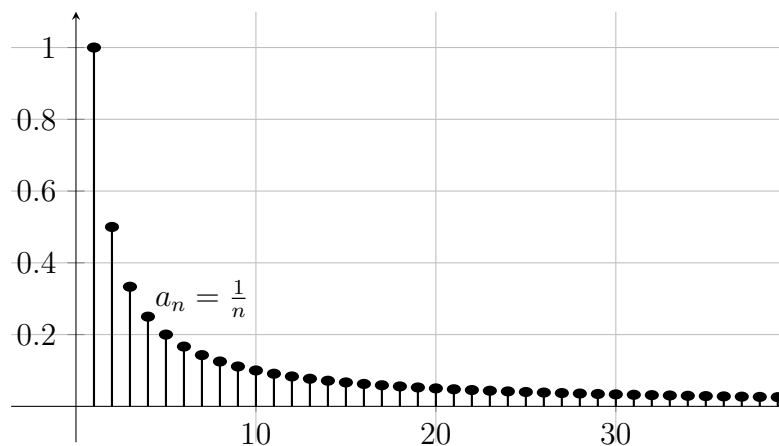
Impliciet voorschrift: $u_n = \frac{1}{\frac{2}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n-2}}}$

Expliciet voorschrift: $u_n = \frac{1}{n}$

Convergentie:

$$\left(\frac{1}{n}\right)_n \longrightarrow 0$$

Grafiek:



6.5.5 Rij van Fibonacci

$$(f_n)_n : \begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \end{cases}$$

6.6 Integralen

6.6.1 Definities

F is een **primitieve functie** van f

$$\Leftrightarrow F' = f$$

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

6.6.2 Eigenschappen integralen

Integreren en differentiëren

Inverse operaties!

$$\left(\int f(x) \, dx \right)' = f(x)$$

$$\int F'(x) \, dx = F(x) + C$$

Lineariteit

$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$
$$\int a f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$$

6.6.3 Basisintegralen

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2+k}| + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

6.6.4 Integratiemethoden

Substitutiemethode

$$\int f(t) dt = \int f(g(x))g'(x) dx$$

met substitutie $t = g(x)$

Partiële integratie

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

6.6.5 Integratie van Rationale Functies

Methode Voor het integreren van een rationale functie $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

1. Als $\text{gr}(P(x)) \geq \text{gr}(Q(x))$, voer een Euclidische deling uit:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

met $\text{gr}(R(x)) < \text{gr}(Q(x))$.

2. Factoriseer de noemer $Q(x)$ in lineaire factoren $(px + q)^m$ en/of irreducibele kwadratische factoren $(ax^2 + bx + c)^n$.
3. Ontbind $\frac{R(x)}{Q(x)}$ in een som van partieelbreuken.

- Voor elke factor $(px + q)^m$ bevat de ontbinding:

$$\frac{A_1}{px + q} + \frac{A_2}{(px + q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px + q)^m}$$

- Voor elke factor $(ax^2 + bx + c)^n$ bevat de ontbinding:

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

4. Integreer het veeltermgedeelte $S(x)$ en elke partieelbreuk afzonderlijk.

6.6.6 Toepassingen van bepaalde integralen

Oppervlakte tussen kromme en x-as De oppervlakte A tussen de grafiek van $f(x)$ en de x-as over het interval $[a, b]$:

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

Oppervlakte tussen twee krommen De oppervlakte A ingesloten door de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ over het interval $[a, b]$:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Volume van een omwentelingslichaam Het volume V van het lichaam verkregen door de grafiek van $f(x)$ te wentelen rond de x-as over $[a, b]$:

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Booglengte van een kromme De lengte L van de boog van de grafiek van $f(x)$ van $x = a$ tot $x = b$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Hoofdstuk 7

Complexe getallen

7.1 Complexe getallen

7.1.1 Definities complexe getallen

Iminaire eenheid

- i is de **iminaire eenheid** met

$$i^2 = -1$$

- Gevolg:

$$i^n = i^{n+4} \quad (n \in \mathbb{N})$$

- $\mathbb{I}$: verzameling van imaginaire getallen

$$\mathbb{I} = \{bi \mid b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$$

Complexe getallen

- Een **complex getal** heeft de vorm

$$z = a + bi \quad \text{met } a, b \in \mathbb{R}$$

- $a = \operatorname{Re}(z)$: reële deel
- $b = \operatorname{Im}(z)$: imaginaire deel
- Een complex getal is **zuiver imaginair**

$$\Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0$$

- $\mathbb{C}$: verzameling van complexe getallen

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$$

- $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$ zijn gelijk

$$\Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

- z en $\bar{z}$ zijn elkaars complex **toegevoegden**

$$\Leftrightarrow z = a + bi \wedge \bar{z} = a - bi$$

7.1.2 Bewerkingen complexe getallen

Som (verschil)

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

- Som imaginaire:

$$ai + bi = (a + b)i \in \mathbb{I}$$

- Som toegevoegden:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a \in \mathbb{R}$$

- $\mathbb{C}, +$ is een commutatieve groep

- Inwendig
- Associatief
- Neutraal element: 0
- Symmetrisch element: $-z$
- Commutatief

Product

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- Product imaginaire:

$$ai \cdot bi = -ab \in \mathbb{R}$$

- Product toegevoegden:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

- $\mathbb{C}_0, \cdot$ is een commutatieve groep

- Inwendig
- Associatief
- Neutraal element: 1
- Symmetrisch element:

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i$$

- Commutatief

Quotiënt

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

- Praktisch: Teller en noemer $\times$ toegevoegde

- Quotiënt imaginaire: $\frac{ai}{bi} = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

- Quotiënt toegevoegden: $\frac{z}{\bar{z}} \in \mathbb{C}$

7.1.3 Machten van complexe getallen**Definitie**

$$(a + bi)^n = \underbrace{(a + bi) \cdot (a + bi) \cdot \dots \cdot (a + bi)}_{n \text{ factoren}}$$

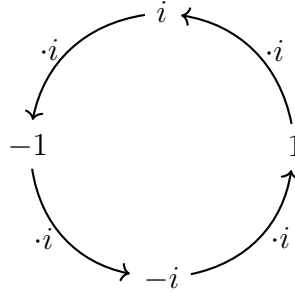
$$(a + bi)^1 = a + bi$$

$$(a + bi)^0 = 1$$

$$(a + bi)^{-n} = \frac{1}{(a + bi)^n}$$

Machten van de imaginaire eenheid

$$\begin{aligned} i^{4n} &= 1 & i^{4n+1} &= i \\ i^{4n+2} &= -1 & i^{4n+3} &= -i \end{aligned}$$

**Bijzondere machten**

$$\begin{aligned} (a + bi)^0 &= 1 \\ (a + bi)^1 &= a + bi \\ (a + bi)^2 &= a^2 - b^2 + 2abi \\ (a + bi)^3 &= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i \end{aligned}$$

7.1.4 Vierkantswortel van een complex getal

Definitie $x + yi$ is een **vierkantswortel** uit $a + bi$

$$\Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi$$

Algemene oplossing ($b \neq 0$)

$$\begin{aligned} (x + yi)^2 &= a + bi \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \end{cases} \\ \Leftrightarrow x + yi &= \pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{r-a}{2}} \right) \\ &\text{met } r = \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Oplossingen voor reële getallen ($b = 0$)

$$a \geq 0 : \quad x + yi = \pm\sqrt{a}$$

$$a < 0 : \quad x + yi = \pm i\sqrt{-a}$$

7.1.5 Complexe vierkantsvergelijkingen

Standaardvorm Vorm **vierkantsvergelijking** in $\mathbb{C}$ is

$$az^2 + bz + c = 0 \text{ met } a \in \mathbb{C}_0, b, c \in \mathbb{C}$$

Eigenschappen

- Elke vierkantsvergelijking in $\mathbb{C}$ heeft twee oplossingen in $\mathbb{C}$, geteld met multipliciteit.
- Als $a, b, c \in \mathbb{R}$, zijn de oplossingen ofwel beide reëel, ofwel een paar niet-reële complex toegevoegde getallen.

Oplossingsmethode

$$az^2 + bz + c = 0$$

- Bereken $D = b^2 - 4ac$
- Bereken $\pm\sqrt{D}$
- Bereken $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

7.1.6 Binomiaalvergelijkingen

Definitie Vorm **binomiaalvergelijking** in de onbekende z is

$$z^n = a \text{ met } a \in \mathbb{C}_0, n \in \mathbb{N}_0$$

Eigenschappen

- Een binomiaalvergelijking heeft n verschillende complexe oplossingen.
- Een binomiaalvergelijking met $a \in \mathbb{R}$ heeft hoogstens 2 reële oplossingen.

7.2 Goniometrische gedaante

7.2.1 Goniometrische gedaante

Definitie

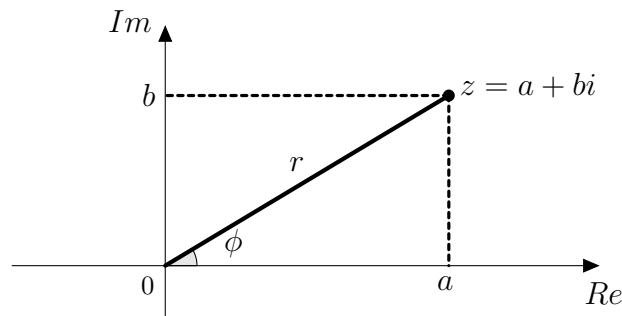
$$z = \underbrace{a + bi}_{\text{cartesisch}} = r \underbrace{(\cos \phi + i \sin \phi)}_{\text{goniometrisch}}$$

- **modulus** $r = |z|$ is afstand oorsprong tot complex getal
- Voor $z \neq 0$ is het **hoofdargument** $\phi = \arg z \in [0, 360^\circ[$ de hoek tussen de positieve reële as en de halfrechte vanuit de oorsprong door z

$$\bullet \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan \phi = \frac{b}{a} & (a \neq 0) \\ \phi = 90^\circ \vee 270^\circ & (a = 0) \end{cases}$$

- Kies ϕ in het kwadrant bepaald door $z = a + bi$.

$$\bullet \begin{cases} a = r \cdot \cos \phi \\ b = r \cdot \sin \phi \end{cases}$$



Eigenschappen

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \wedge \phi_1 = \phi_2$
- $r \in \mathbb{R}^+$
- $z = 0 \Rightarrow r = 0$ en ϕ is onbepaald
- $|z| = |\bar{z}| \wedge \arg z \equiv -\arg \bar{z} \pmod{360^\circ}$
- $|z| = |-z| \wedge \arg(-z) \equiv \arg z + 180^\circ \pmod{360^\circ}$

Bijzondere gevallen

z	$r = z $	$\phi = \arg z$
1	1	0°
i	1	90°
-1	1	180°
$-i$	1	270°

7.2.2 Bewerkingen in goniometrische vorm

Product

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

Quotiënt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$$

Macht

$$z^n = r^n (\cos(n\phi) + i \sin(n\phi))$$

7.2.3 Formule van Euler

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

7.2.4 Formule van de Moivre

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi)$$

7.3 Veeltermen met complexe coëfficiënten

7.3.1 Definities

Veelterm in één veranderlijke z

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{i=0}^n a_i z^i \\ &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \end{aligned}$$

- Coëfficiënten : $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$
- Graad : $\text{gr}(A) = n \in \mathbb{N}$

- Notatie: $A(z), B(z), \dots$
- Verzameling: $\mathbb{C}[z]$
- Getalwaarde $A(z)$ voor $\omega = a + bi$: $A(\omega)$
- Wortel ω van $A(z) \Leftrightarrow A(\omega) = 0$

7.3.2 Deelbaarheid

Definitie

$A(z)$ is **deelbaar** door $D(z)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow D(z) | A(z) \\ &\Leftrightarrow \exists Q(z) \in \mathbb{C}[z] : A(z) = D(z) \cdot Q(z) \\ &\Leftrightarrow R(z) = 0 \end{aligned}$$

- $A(z)$: deeltal
- $A(z)$: deler
- $D(z)$: quotiënt
- $R(z)$: rest

Criterium deelbaarheid

$A(z)$ is deelbaar door $z - \omega$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow z - \omega | A(z) \\ &\Leftrightarrow A(\omega) = 0 \end{aligned}$$

Product deelbaar

Als $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ en $\omega_1 \neq \omega_2$ dan

$$\begin{aligned} &((z - \omega_1) \cdot (z - \omega_2)) | A(z) \\ &\Leftrightarrow (z - \omega_1) | A(z) \wedge (z - \omega_2) | A(z) \end{aligned}$$

Stelling van d'Alembert

(minstens één wortel)

$$\begin{aligned} A(z) \in \mathbb{C}[z] \wedge \text{gr}(A(z)) \geq 1 \\ \implies \exists \omega \in \mathbb{C} : A(\omega) = 0 \end{aligned}$$

Aantal nulwaarden

Een veelterm van graad n heeft precies n (mogelijks samenvallende) wortel in $\mathbb{C}$

Ontbinding in factoren

$$\begin{aligned} A(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\ &= a_n (z - \omega_1)(z - \omega_2) \cdots (z - \omega_n) \end{aligned}$$

- ω_i : wortels van $A(z)$

Hoofdstuk 8

Logica

8.1 Propositielogica

8.1.1 Uitspraken

Axioma's

- Een uitspraak is ofwel waar ofwel vals.

Verklaring symbolen

- p, q : uitspraken
- $\neg p$: niet p (negatie)
- $p \wedge q$: p en q (conjunctie)
- $p \vee q$: p of q (disjunctie)
- $p \rightarrow q$: als p dan q (implicatie)
- $p \leftrightarrow q$: p als en slechts als q (equivalentie)

Definities

- p **tautologie** als p altijd waar
- p **contradictie** als p altijd vals
- $p \leftrightarrow q$ zijn **equivalente uitspraken** als $p \leftrightarrow q$ is een tautologie

8.1.2 Stellingen

- $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
- $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
- $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
- $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
- $(\neg(p \wedge q) \wedge p) \rightarrow \neg q$
- $(p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow p$

Contrapositie van de implicatie

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Wetten van De Morgan

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Commutativiteiten

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$$

Associativiteiten

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

$$((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$$

Distributiviteiten

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Transitiviteiten

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \rightarrow (p \Leftrightarrow r)$$

8.1.3 Uitspraken met kwantoren

$$\neg(\forall x \in A : p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A : \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x \in A : p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A : \neg p(x)$$

Hoofdstuk 9

Stochastiek

9.1 Beschrijvende statistiek

9.1.1 Begrippen

- **Populatie** : verzameling van alle elementen
- **Steekproef** : deelverzameling van de populatie
- **Steekproefgrootte** n : aantal elementen van de steekproef
- **Veranderlijke** x : afbeelding van steekproef naar waarneming

9.1.2 Veranderlijken

- Continue: nauwkeurigheid zelf te kiezen
- Discrete: ordinaal of nominaal

9.1.3 Kengetallen

Centrummaten

- gemiddelde $\bar{x}$: som waarnemingen gedeeld door de steekproefgrootte

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$$

- mediaan Med : midden van de waarnemingen gerangschikt
- modus Mod : meest voorkomende waarneming

Spreidingsmaten

- variatiebreedte Ran : verschil tussen grootste en kleinste waarneming

$$Ran = x_{\max} - x_{\min}$$

- variantie Var :

$$Var_x = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

- standaardafwijking s :

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

9.2 Combinatieleer

9.2.1 Productregel

r onafhankelijke deelbeslissingen met

$$n_1, n_2, \dots, n_r$$

mogelijkheden

$$\Rightarrow \# \text{mogelijkheden} = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$$

9.2.2 Somregel

Met dubbele telling

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

- $\#A$: aantal elementen in A
- $A \cup B$: unie (vereniging), A of B
- $A \cap B$: doorsnede, A en B

Met elkaar uitsluitende mogelijkheden Zijn A en B disjunctie verzamelingen

$$\Rightarrow \#(A \cup B) = \#A + \#B$$

9.2.3 Faculteit

Definitie

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

Eigenschap

$$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$$

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

9.2.4 Permutaties

$$\begin{aligned} P_n &= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1 \\ &= n! \end{aligned}$$

9.2.5 Variaties

$$\begin{aligned} V_n^k &= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k + 1) \\ &= \frac{n!}{(n - k)!} \end{aligned}$$

9.2.6 Herhalingsvariaties

$$\bar{V}_n^k = n^k$$

9.2.7 Combinaties

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

9.2.8 Herhalingscombinaties

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

$$\begin{aligned} P_n^{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k} &= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!} \end{aligned}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

n																
$\downarrow$																
0	1															
1	1	1														
2	1	2	1													
3	1	3	3	1												
4	1	4	6	4	1											
5	1	5	10	10	5	1										
6	1	6	15	20	15	6	1									
7	1	7	21	35	35	21	7	1								
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1							
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\leftarrow k$		

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Binomium van Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

9.3 Kansrekening

9.3.1 Basisbegrippen kansrekening

Begrip	Notatie
(Kans)experiment	E
Uitkomst	u_i
Uitkomstenverzameling	U
Gebeurtenis	$A, B, \dots$

9.3.2 Gebeurtenissen

Definities

- A is een **gebeurtenis**

$$\Leftrightarrow A \subset U$$

- A is een **onmogelijke gebeurtenis**

$$\Leftrightarrow A = \emptyset$$

$$\#A = 0$$

- A is een **elementaire gebeurtenis**

$$\Leftrightarrow \#A = 1$$

- A is een **zekere gebeurtenis**

$$\Leftrightarrow A = U$$

$$\#A = n$$

Bewerkingen

- Tegengestelde (complement):

$$\bar{A} = U \setminus A$$

- Vereniging (unie):

$$A \cup B \Leftrightarrow A \text{ of } B \text{ (of beide) treden op}$$

- Doorsnede:

$$A \cap B \Leftrightarrow A \text{ en } B \text{ treden tegelijk op}$$

Rekenregels

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$A \cup \bar{A} = U$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Disjuncte gebeurtenissen

A en B zijn **disjunct** (elkaar uitsluitend)

$$\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

9.3.3 Kanswaarde

Definitie

$P : U \rightarrow [0, 1]$ is een **kanswaarde** als $\forall A \subset U$:

- $P(A) \geq 0$
- $P(U) = 1$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Stellingen

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$

9.3.4 Regel van Laplace

P heeft een **uniforme kans** op $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

$$\Leftrightarrow P(u_1) = P(u_2) = \dots = P(u_n)$$

P een uniforme kans dan geldt de **regel van Laplace**:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#U}$$

9.3.5 Kanswetten

Kans van een onmogelijke gebeurtenis

$$P(\emptyset) = 0$$

Bewaren van de orde van gebeurtenissen

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Complementregel

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Somregel

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Verschilregel

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

9.3.6 Voorwaardelijke kans

Definitie

De kans op B op voorwaarde dat A gerealiseerd is:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Eigenschappen

- Bij uniforme kansen geldt

$$P(B|A) = \frac{\#(A \cap B)}{\#A}$$

- Productregel

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= P(B) \cdot P(A|B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \\ &\quad \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

- Wet van totale kans

$$\begin{cases} U = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ als } i \neq j \\ B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$$

- Wet van Bayes

$$\begin{cases} U = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ als } i \neq j \\ B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

9.3.7 Onafhankelijke gebeurtenissen

A en B zijn **onafhankelijke gebeurtenissen**

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ \Leftrightarrow P(A|B) &= P(A) \\ \Leftrightarrow P(B|A) &= P(B) \end{aligned}$$

9.4 Distributiefuncties

9.4.1 Speciale distributiefuncties

Uniforme verdeling

Notatie:

$$X \sim U(n)$$

Kans:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

Karakteristieken:

$$\begin{array}{l|l} \text{Verwachtingswaarde} & \mu = E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \text{Variantie} & \begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \mu^2) \end{aligned} \end{array}$$

Normale verdeling

Notatie:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- μ : verwachtingswaarde
- σ^2 : variantie

Kansdichtheidsfunctie:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Karakteristieken:

$$\begin{array}{l|l} \text{Verwachtingswaarde} & E(X) = \mu \\ \text{Variantie} & \text{Var}(X) = \sigma^2 \\ \text{Standaardafwijking} & \sigma_X = \sigma \end{array}$$

Exponentiële verdeling

Notatie:

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

- λ : parameter

Kansdichtheidsfunctie:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

Karakteristieken:

Verwachtingswaarde	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$
Variantie	$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
Standaardafwijking	$\sigma_X = \frac{1}{\lambda}$

Bernoulli verdeling**Kans:**

$$P(X = k) = p^k(1 - p)^{1-k} \quad (k = 0, 1)$$

Karakteristieken:

Verwachtingswaarde	$E(X) = p$
Variantie	$\text{Var}(X) = p(1 - p)$
Standaardafwijking	$\sigma_X = \sqrt{p(1 - p)}$

Binomiale verdeling**Notatie:**

$$X \sim B(n, p)$$

- n : Aantal herhalingen experiment
- p : kans op succes
- $q = 1 - p$: kans op mislukking

Kans:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

Karakteristieken:

Verwachtingswaarde	$E(X) = np$
Variantie	$\text{Var}(X) = npq$
Standaardafwijking	$\sigma_X = \sqrt{npq}$

Poisson verdeling**Notatie:**

$$X \sim Po(\lambda)$$

- λ : parameter
- $Po(\lambda) \sim B(n, p)$ als $p \leq 0.1$ en $np \leq 10$

Karakteristieken:

Verwachtingswaarde	$E(X)$	$=$	λ
Variantie	$\text{Var}(X)$	$=$	λ
Standaardafwijking	σ_X	$=$	$\sqrt{\lambda}$

Hoofdstuk 10

Fysica

10.1 Optica

10.1.1 Wet van Snellius

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

- i : invalshoek ten opzichte van de normaal
- r : brekingshoek ten opzichte van de normaal
- n : brekingsindex van het medium

10.1.2 Lensformule

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

- v : beeldafstand
- b : voorwerpafstand
- f : brandpuntsafstand van de lens

10.2 Druk

10.2.1 Hydrostatische druk

$$p = \rho \cdot g \cdot h + p_0$$

- p : druk op een bepaalde diepte

- ρ : dichtheid van de vloeistof
- g : zwaartekrachtversnelling
- h : hoogte/diepte in de vloeistof
- p_0 : druk aan het oppervlak (meestal atmosferische druk)

10.2.2 Opwaartse kracht in een vloeistof

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V$$

- F_A : opwaartse kracht
- ρ : dichtheid van de vloeistof
- g : zwaartekrachtversnelling
- V : volume van het verplaatste vloeistof

10.3 Gaswetten

10.3.1 Ideale gaswet

$$PV = nRT$$

- P : druk van het gas
- V : volume van het gas
- n : aantal molen gas
- R : universele gasconstante
- T : temperatuur in Kelvin

10.3.2 Boyle's wet

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

- P_1 : begin druk
- V_1 : begin volume
- P_2 : eind druk
- V_2 : eind volume

10.4 Warmteleer

10.4.1 Eerste hoofdwet van de thermodynamica

$$\Delta U = Q - W$$

- ΔU : verandering in interne energie
- Q : toegevoerde warmte
- W : door het systeem verrichte arbeid

10.4.2 Warmteoverdracht

$$Q = mc\Delta T$$

- Q : overgedragen warmte
- m : massa van het voorwerp
- c : specifieke warmtecapaciteit van het materiaal
- ΔT : temperatuurverandering

10.4.3 Warmtecapaciteit

$$Q = C\Delta\theta$$

- Q : hoeveelheid warmte
- C : warmtecapaciteit van het object
- $\Delta\theta$: temperatuurverandering

10.4.4 Smeltwarmte

$$Q = \ell_s \cdot m$$

- Q : hoeveelheid warmte die nodig is voor het smelten
- ℓ_s : smeltwarmte van het materiaal (warmte per eenheid van massa)
- m : massa van het materiaal

10.4.5 Verdampingswarmte

$$Q = \ell_v \cdot m$$

- Q : hoeveelheid warmte die nodig is voor het verdampen
- ℓ_v : verdampingswarmte van het materiaal (warmte per eenheid van massa)
- m : massa van het materiaal

10.5 Elektrostatica

10.5.1 Wet van Coulomb

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

- F : kracht tussen de twee ladingen
- q_1 en q_2 : de waarden van de twee ladingen
- r : afstand tussen de middelpunten van de twee ladingen
- k : elektrostatische constante
 $k \approx 8.9875 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$

10.5.2 Elektrisch veld van een puntlading

$$E = k \frac{|q|}{r^2}$$

- E : elektrisch veldsterkte op een punt
- r : afstand
- q : lading

10.5.3 Elektrische potentiaal van een puntlading

$$V = k \frac{q}{r}$$

- V : elektrische potentiaal op een punt
- r : afstand
- q : lading

10.5.4 Relatie tussen elektrisch veld en potentiaal

$$E = -\nabla V$$

10.5.5 Capaciteit van een condensator

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}$$

- C : capaciteit
- ε_0 : elektrische constante van het vacuüm
- ε_r : relatieve permittiviteit (diëlektrische constante) van het materiaal tussen de platen
- A : oppervlakte van een van de platen van de condensator
- d : afstand tussen de platen van de condensator

10.5.6 Energie opgeslagen in een condensator

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

10.5.7 Continuïteitsvergelijking (Gauss' wet voor elektriciteit)

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

10.6 Elektromagnetisme

10.6.1 Lorentzkracht op een bewegende lading in een magnetisch veld

$$F_L = B \cdot |Q| \cdot v$$

- F_L : Lorentzkracht
- B : magnetische veldsterkte
- Q : lading
- v : snelheid van de lading loodrecht op het magnetisch veld

10.6.2 Lorentzkracht op een stroomdragende geleider in een magnetisch veld

$$F_L = B \cdot I \cdot \ell$$

- F_L : Lorentzkracht
- B : magnetische veldsterkte
- I : stroom door de geleider
- ℓ : lengte van het segment van de geleider dat zich in het magnetische veld bevindt

10.6.3 Magnetisch veld rond een lange rechte stroomdragende draad

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r}$$

- B : magnetische veldsterkte op een afstand r van de draad
- μ_0 : magnetische permeabiliteit van het vacuüm
- I : stroom door de draad
- r : radiale afstand van het punt van belang tot de draad

10.6.4 Magnetisch veld in de kern van een lange spoel

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{\ell}$$

- B : magnetische veldsterkte in de kern van de spoel
- μ_0 : magnetische permeabiliteit van het vacuüm
- N : aantal windingen van de spoel
- I : stroom door de spoel
- ℓ : lengte van de spoel

10.6.5 Magnetische flux

$$\Phi = B \cdot A$$

- Φ : magnetische flux door een oppervlakte
- B : magnetische veldsterkte loodrecht op de oppervlakte
- A : oppervlakte door welke de magnetische veldlijnen gaan

10.6.6 Wet van Biot-Savart

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

- $\mathbf{B}$: magnetisch veld op positie $\mathbf{r}$
- I : stroom door het infinitesimaal kleine draadelement $d\mathbf{l}$
- $\hat{r}$: eenheidsvector wijzend van het draadelement naar de observatieplaats
- r : afstand van het draadelement naar de observatieplaats
- μ_0 : magnetische permeabiliteit van het vacuüm

10.6.7 Ampère's wet

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

- $\mathbf{B}$: magnetisch veld
- I_{enc} : stroom ingesloten door de lus
- μ_0 : magnetische permeabiliteit van het vacuüm

10.6.8 Faraday's wet van elektromagnetische inductie

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- $\mathcal{E}$: Geïnduceerde elektromotorische kracht (EMK)
- Φ_B : Magnetische flux

10.6.9 Lenz's wet

De richting van de geïnduceerde stroom (of EMK) is zodanig dat deze de verandering die het veroorzaakte, tegenwerkt.

10.6.10 Maxwell's vergelijkingen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- $\mathbf{E}$: elektrisch veld
- $\mathbf{B}$: magnetisch veld
- ρ : elektrische ladingdichtheid
- $\mathbf{J}$: stroomdichtheid
- ε_0 : elektrische permittiviteit van het vacuüm
- μ_0 : magnetische permeabiliteit van het vacuüm

10.6.11 Snelheid van licht in vacuüm

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$\approx 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

- c : snelheid van licht in vacuüm
- μ_0 : magnetische permeabiliteit van het vacuüm
- ε_0 : elektrische permittiviteit van het vacuüm

10.7 Kernfysica

10.7.1 Activiteit van een radioactieve stof

$$A(t) = \lambda \cdot N(t)$$

- $A(t)$: activiteit (aantal vervallen per tijdseenheid) op tijdstip t
- λ : vervalconstante van de stof
- $N(t)$: aantal nog niet vervallen kernen op tijdstip t

10.7.2 Aantal overgebleven kernen na tijd t

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

- $N(t)$: aantal nog niet vervallen kernen op tijdstip t
- N_0 : initieel aantal kernen op tijdstip $t = 0$
- λ : vervalconstante van de stof
- t : tijd verstreken sinds het begin van de observatie

10.7.3 Relatie van de vervalconstante met de halfwaardetijd

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}}$$

- λ : vervalconstante van de stof
- $T_{1/2}$: halfwaardetijd van de radioactieve stof (de tijd waarin de helft van de kernen vervalt)

10.8 Kinematica

10.8.1 Verplaatsing met constante snelheid

$$x = x_0 + v_x \cdot t$$

- x : eindpositie op tijdstip t
- x_0 : beginpositie
- v_x : snelheid in de x-richting (aangenomen constant)
- t : verstreken tijd

10.8.2 Snelheid bij een constante versnelling

$$v_x = v_{x,0} + a_x \cdot t$$

- v_x : snelheid in de x-richting op tijdstip t
- $v_{x,0}$: beginsnelheid in de x-richting
- a_x : versnelling in de x-richting (aangenomen constant)
- t : verstreken tijd

10.8.3 Verplaatsing bij een constante versnelling

$$x = x_0 + v_{x,0} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}$$

- x : eindpositie op tijdstip t
- x_0 : beginpositie
- $v_{x,0}$: beginsnelheid in de x-richting
- a_x : versnelling in de x-richting (aangenomen constant)
- t : verstreken tijd

10.9 Dynamica

10.9.1 Tweede wet van Newton

$$F = m \cdot a$$

- F : netto kracht op een object
- m : massa van het object
- a : versnelling van het object

10.9.2 Wet van Newton

Zwaartekracht tussen twee massa's:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

- F : gravitatiekracht tussen twee massa's
- G : gravitatieconstante
- m_1 en m_2 : massa's van de twee objecten
- r : afstand tussen de middelpunten van de twee massa's

10.9.3 Zwaartekracht op een object nabij het aardoppervlak

$$F_z = m \cdot g$$

- F_z : Gewichtskracht op een object
- m : Massa van het object
- g : Versnelling door zwaartekracht (op aarde ongeveer 9.81 m/s^2)

10.9.4 Werk verricht door een kracht

$$W = F \cdot d$$

- W : werk
- F : kracht
- d : verplaatsing in de richting van de kracht

10.9.5 Vermogen

$$P = \frac{W}{t}$$

- P : vermogen
- W : werk
- t : tijd

10.9.6 Veerkracht

$$F_v = k \cdot |\Delta\ell|$$

- F_v : veerkracht
- k : veerconstante
- $\Delta\ell$: uitrekking of compressie van de veer ten opzichte van de evenwichtspositie

10.9.7 Kinetische energie

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

- E_k : kinetische energie
- m : massa van het object
- v : snelheid van het object

10.9.8 Potentiële energie in een zwaartekrachtsveld

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

- E_p : potentiële energie
- m : massa van het object
- g : versnelling door zwaartekracht
- h : hoogte boven referentiepunt

10.9.9 Potentiële energie in een veer

$$E_p = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

- E_p : potentiële energie van een uitgerekte of samengedrukte veer
- k : veerconstante
- x : uitrekking of compressie van de veer ten opzichte van de evenwichtspositie

10.9.10 Centripetale versnelling

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

- a_n : centripetale versnelling
- v : snelheid van het object
- r : straal van de cirkelvormige beweging

10.10 Trillingen en Golven

10.10.1 Harmonische trilling

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

- $y(t)$: verplaatsing van het object op tijdstip t
- A : amplitude van de trilling
- ω : hoekfrequentie
- t : tijd
- ϕ : fasehoek

10.10.2 Golfvergelijking

$$y(x, t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \phi)$$

- $y(x, t)$: verplaatsing van het punt op positie x op tijdstip t
- A : amplitude van de golf
- k : golftal of golfgetal
- ω : hoekfrequentie
- x : positie
- t : tijd
- ϕ : fasehoek

10.10.3 Relatie tussen hoekfrequentie en periode

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- ω : hoekfrequentie
- T : periode

10.10.4 Relatie tussen golflengte, snelheid, en frequentie

$$\lambda = \frac{v}{f} = v \cdot T$$

- λ : golflengte
- v : golfsnelheid
- f : frequentie van de golf
- T : periode van de golf

10.10.5 Periode van een simpele harmonische trilling

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- T : periode van de trilling
- m : massa van het trillende object
- k : veerconstante

10.10.6 Harmonische frequenties in een gesloten buis

$$f_n = n \cdot \frac{v}{4L}$$

- f_n : n -de harmonische frequentie
- n : harmonische nummer (1, 2, 3, ...)
- v : snelheid van het geluid in de buis
- L : lengte van de buis

10.11 Geluid

10.11.1 Geluidssnelheid in een medium

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- v : snelheid van geluid in het medium
- B : bulkmodulus van het medium
- ρ : dichtheid van het medium

10.11.2 Dopplereffect voor een waarnemer in rust

$$f' = f \left(\frac{c}{c - v_s} \right)$$

- f' : waargenomen frequentie
- f : uitgezonden frequentie
- c : snelheid van geluid in het medium
- v_s : snelheid van de geluidsbron (positief als de bron de waarnemer nadert, negatief als de bron zich van de waarnemer verwijdt)

10.11.3 Geluidsintensiteit

$$I = \frac{P}{A}$$

- I : geluidsintensiteit
- P : geluidsvermogen
- A : oppervlakte waarover het geluid zich verspreidt

10.11.4 Geluidsniveau

$$L = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

- L : geluidsniveau in decibels (dB)
- I : geluidsintensiteit
- I_0 : referentie-intensiteit (meestal $1 \times 10^{-12} \text{W/m}^2$)

10.12 Fysische constanten

10.12.1 Atmosferische druk

$$p_{\text{atm}} = 1.00 \times 10^5 \text{ Pa}$$

10.12.2 Gravitatie

Gravitatieconstante

$$G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Zwaartekrachtversnelling (valversnelling) nabij aardoppervlak

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

* variabel afhankelijk van locatie

10.12.3 Lichtsnelheid in vacuüm

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

10.12.4 Plancks constante

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

10.12.5 Gasconstante

$$R = 8.314462618 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

10.12.6 Elektronenlading

$$e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$$

10.12.7 Massadichtheid

Materiaal	Massadichtheid
Water bij 20°C	$\rho_{\text{water}} = 998.2 \text{ kg/m}^3$
Lood	$\rho_{\text{lood}} = 11\,342 \text{ kg/m}^3$
Goud	$\rho_{\text{goud}} = 19\,320 \text{ kg/m}^3$
Aluminium	$\rho_{\text{aluminium}} = 2\,700 \text{ kg/m}^3$
IJzer	$\rho_{\text{ijzer}} = 7\,874 \text{ kg/m}^3$

10.12.8 Thermische eigenschappen

Eigenschap	Waarde
warmtecapaciteit van water	$c_{\text{water}} = 4.186 \text{ J/g} \cdot \text{K}$
verdampingswarmte van water	$\ell_v = 2.260 \text{ kJ/g}$
smeltwarmte van ijs	$\ell_s = 334 \text{ J/g}$

10.12.9 Elektrostatica

Eigenschap	Waarde
Constance van Coulomb	$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
Magnetische permeabiliteit vacuüm	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$
Elektrische permittiviteit vacuüm	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$
Elementaire lading	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

10.12.10 Energie

$$1 \text{ kWh} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

10.12.11 Massa's van fundamentele deeltjes

Deeltje	Massa
Elektron	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Proton	$m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Neutron	$m_n = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Getal van Avogadro

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Hoofdstuk 11

Symboelen

11.1 Griekse symbolen

11.1.1 Griekse symbolen

symbool	klein	hoofdletter
alfa	α	A
beta	β	B
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
e-pilon	ϵ	E
zeta	ζ	Z
eta	η	H
theta	θ or ϑ	Θ
jota	ι	I
kappa	κ	K
lambda	λ	Λ
mu	μ	M
nu	ν	N
xi	ξ	Ξ
o-mikron	o	O
pi	π or ϖ	Π
rho	ρ or ϱ	P
sigma	σ or ς	Σ
tau	τ	T
u-pilon	v	Υ
fi	ϕ or φ	Φ
chi	χ	X
psi	ψ	Ψ
o-mega	ω	Ω

11.2 Symbolen uit de logica

11.2.1 Propositielogica

symbool	naam	uitspraak
$\Rightarrow$	implicatie	als ... dan ook ... impliceert
$\Leftrightarrow$	equivalentie	is equivalent met
$\wedge$	conjunctie	en
$\vee$	disjunctie	of
$\dot{\vee}$	uitsluitende of	ofwel
$\neg$	negatie	niet

11.2.2 Predicatenlogica

symbool	naam	uitspraak
$\forall$	universaliteit	voor alle
$\exists$	existentie	er bestaat een
$\exists!$	uniciteit	er is precies één
$\nexists$		er bestaat geen

11.3 Verzamelingen

11.3.1 Getalverzamelingen

verzameling	symbool
natuurlijke getallen	$\mathbb{N}$
gehele getallen	$\mathbb{Z}$
rationale getallen	$\mathbb{Q}$
reële getallen	$\mathbb{R}$
complexe getallen	$\mathbb{C}$
quaternionen	$\mathbb{H}$

Opmerking: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$

11.3.2 Verzamelingenleer

symbool	naam	uitspraak
$\{\dots\}$	verzameling	de verzameling van ...
$\{\dots \dots\}$	verzameling	de verz van ... waarvoor ...
$\emptyset$ of $\{\}$	ledig	de lege verzameling
$\in$	element	element van
$\subseteq$	deelverzameling	deelverzameling van
$\cup$	unie	vereniging van ... en ...
$\cap$	doorsnede	doorsnede van ... en ...
$\setminus$	verschilverzameling	zonder
$\times$	cartesische product	maal
2^X	machtsverzameling	verz van deelverz
$\#$	kardinaliteit	aantal elementen van

11.4 Wiskundige constanten

11.4.1 Pi

Verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel

$$\pi = 3.14159\,26535\,89793\,23846\ldots$$

11.4.2 Getal van Euler

$$\text{Limiet van } e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = 2.71828\,18284\,59045\,23536\ldots$$

11.4.3 Pythagoras constante

Positieve oplossing van $x^2 = 2$

$$\sqrt{2} = 1.41421\,35623\,73095\,04880\ldots$$

11.4.4 Theodorus constante

Positieve oplossing van $x^2 = 3$

$$\sqrt{3} = 1.73205\,08075\,68877\,29352\ldots$$

11.4.5 Gulden snede (Phi)

De verhouding van twee getallen zodat de verhouding van hun som tot het grootste van de twee getallen gelijk is, dus $\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\varphi = 1.61803\,39887\,49894\,84820\dots$$

11.4.6 Imaginaire eenheid

Het getal $i \in \mathbb{C}$ is elke oplossing van $x^2 = -1$.

Hoofdstuk 12

Tabellen

12.1 Machten

12.1.1 Machten met natuurlijk grondtal en natuurlijke exponent

a^n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729				
4	16	64	256	1024					
5	25	125	625						
6	36	216							
7	49	343							
8	64	512							
9	81	729							
10	100								
11	121								
12	144								
13	169								
14	196								
15	225								
16	256								
17	289								
18	324								
19	361								
20	400								

12.2.1 Standaardnormale verdeling

